BRUNO MARTIN

MÉTHODE DE HAYMAN: GÉNÉRALISATION ET APPLICATION À DIVERS PROBLÈMES D'ÉNUMÉRATION EN ANALYSE COMBINATOIRE

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de mathématiques et de statistique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL

JANVIER 1998

0-612-26242-1

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré à la méthode de Hayman ainsi qu'à diverses applications à des problèmes d'analyse combinatoire énumérative. Nous commençons par un bref exposé de la théorie des fonctions génératrices ("f.g."). Une fois ces notions en main, nous formulons quelques problèmes de combinatoire à l'aide des f.g. Nous démontrons ensuite en détail le résultat de Hayman et l'utilisons pour résoudre certains des problèmes précédents. Nous poursuivons avec un raffinement de l'idée de Hayman nous permettant d'obtenir un développement asymptotique complet de plusieurs f.g. Nous terminons par un bref survol des autres méthodes analytiques utiles en analyse combinatoire.

AVANT-PROPOS

Je tiens à remercier tous ceux et celles qui m'ont aidé et supporté pendant la réalisation de ce mémoire. D'abord M. Thomas J. Ransford, mon directeur de recherche, pour sa disponibilité, ses précieux conseils et l'aide financière qu'il m'a apportée tout au long de cette maîtrise. Je tiens également à remercier M. Pierre Blais, un vrai *Maître*, pour son enseignement inspiré. D'une façon générale, je remercie l'ensemble des professeurs de l'Université Laval pour l'enseignement qu'ils m'ont prodigué au cours de ces cinq années d'études ici. Plus personnellement, un grand merci à France, Jacques et Dominic, sans qui je n'en serais pas là aujourd'hui, ainsi qu'à mes "copains de maths", Mario, Jason, Daniel et Fred.

Table des matières

INTRODUCTION

Le chapitre I est consacré au développement des notions d'analyse combinatoire qui serviront à énoncer et à résoudre les problèmes subséquents. Nous y traiterons d'un peu de théorie des graphes mais surtout des fonctions génératrices ("f.g.") et de la formule exponentielle, le tout à la manière de Wilf dans *Generatingfunctionology* [13].

C'est au chapitre II que nous abordons la méthode de Hayman proprement dite. Tout commence en 1956 lorsque Hayman (*A Generalisation of Stirling's Formula* [5]) définit une classe de fonctions holomorphes (dont font partie beaucoup de f.g.) que nous appellerons H-admissibles, possédant d'intéressantes propriétés. Pour ces fonctions, Hayman obtient une relation asymptotique pour les coefficients de leur développement en série. J'ai repris en détail la démonstration de Hayman et donné quelques applications.

Le chapitre III nous permettra de tirer encore un peu plus de la méthode de Hayman. En 1968, Harris et Schoenfeld (*Asymptotic expansion for the coefficients of analytic functions* [4]) ont réussi à obtenir une relation asymptotique complète pour les coefficients d'une classe plus restreinte de fonctions que nous appellerons HS-admissibles. Ici, je reprendrai l'article de Odlyzko et Richmond (*Asymptotic expansion for the coefficients of analytic generating functions* [8]) qui nous assure que l'exponentielle d'une fonction H-admissible sera HS-admissible. Ceci nous permettra d'obtenir "gratuitement" le développement asymptotique complet des coefficients de plusieurs fonctions génératrices importantes.

Dans le chapitre IV, nous ferons un survol de plusieurs autres méthodes analytiques utiles en analyse combinatoire énumérative. Nous commencerons par quelques méthodes réelles mais porterons une attention particulière aux méthodes faisant appel à l'analyse complexe. Nous exclurons toutefois la méthode du point de selle, celle-ci ayant été exposée relativement en détail à la section 2.1.

Chapitre I

Notions de base en analyse combinatoire et théorie des graphes

1.1 Fonctions génératrices

Dans le présent mémoire, une *fonction génératrice* sera une série formelle à coefficients dans un corps $\mathbb{F}$, avec $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Comme nous aurons besoin d'une notation pratique pour identifier les coefficients d'une série formelle, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, nous noterons le coefficient de x^n par $[x^n]f(x) = a_n$. Voici un petit rappel au sujet des séries formelles qui nous permettra de développer la théorie des fonctions génératrices.

Notons que l'ensemble des séries formelles à coefficients dans un corps $\mathbb{F}$ forme un anneau avec les opérations d'addition et de multiplication définies comme suit.

Définition 1.1.1 *Soient $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ deux séries formelles, alors $f + g$ est définie par $f + g = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ et fg par le produit de Cauchy, c'est-à-dire $fg = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. La composée $f(g(x))$ n'est définie que si $b_0 = 0$, dans quel cas $f(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ où $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k [x^n] g(x)^k$.*

Remarquons que le succès des fonctions génératrices en analyse combinatoire tient en grande partie de leur règle de multiplication. En effet, on peut souvent construire tous les a_n objets de type n (par exemple, tous les graphes connexes à n sommets) en choisissant un objet de type k, un autre de type $n-k$ et en les combinant. Le nombre de façons de faire cela est $a_k b_{n-k}$. En sommant sur k on obtient tous les objets de type n. Le produit de Cauchy de deux séries formelles est directement lié à ce problème.

Nous allons maintenant définir ce que l'on entend par la réciproque et l'inverse d'une série formelle. Nous montrerons ensuite deux propositions donnant des conditions nécessaires à l'existence de tels objets.

Définition 1.1.2 *Soient $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ deux séries formelles. Nous dirons que f et g sont réciproques l'une de l'autre si $fg = 1$. De la même façon, nous dirons que f et g sont l'inverse l'une de l'autre si $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.*

Proposition 1.1.3 *Une série formelle $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ possède une réciproque si et seulement si $a_0 \neq 0$. Dans ce cas, la réciproque est unique.*

Démonstration. Soit $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ la réciproque de f. Alors $fg = 1$ et par la définition du produit, nous avons $c_0 = a_0 b_0 = 1$ d'où $a_0 \neq 0$. De plus, pour $n \geq 1$, nous avons $c_n = 0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, ce qui détermine les b_n de façon unique comme

$$b_n = (-1/a_0) \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}. \quad \square$$

Proposition 1.1.4 *Si f et g sont deux séries formelles inverses l'une de l'autre, alors f et g sont de la forme suivante, $f = f_1 x + f_2 x^2 + \cdots$ et $g = g_1 x + g_2 x^2 + \cdots$, où g_1 et f_1 sont tous deux non nuls.*

Démonstration. Supposons que $f = f_r x^r + \cdots$ et que $g = g_s x^s + \cdots$, où $r, s \geq 0$ et $f_r g_s \neq 0$. Alors $f(g(x)) = x = f_r g_s x^{rs} + \cdots$, d'où $rs = 1$ et $r = s = 1$. $\square$

Définition 1.1.5 *Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. La dérivée de f sera notée $Df = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.*

Ainsi, les règles de dérivation pour une somme, un produit ou un quotient de séries formelles sont les mêmes que dans le calcul différentiel ordinaire.

Comme nous aurons besoin un peu plus loin (section 2.7 et 3.3) d'un théorème sur la composition des séries formelles faisant intervenir les polynômes exponentiels de Bell, parlons-en un peu. Un polynôme exponentiel de Bell $B_{n,k}$ est défini par l'expression

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{c_1! c_2! \cdots (1!)^{c_1} (2!)^{c_2} \cdots} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots,$$

où la somme se fait sur tous les entiers $c_1, c_2, \ldots \geq 0$ tels que

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \cdots = n, \quad \text{et} \quad c_1 + c_2 + c_3 + \cdots = k.$$

Une propriété remarquable de ces polynômes nous sera tout particulièrement utile, à savoir que $B_{n,k}(0, \ldots, x_j, 0, \ldots) = 0$, sauf pour $n = jk$, dans quel cas, $B_{jk,k} = \frac{(jk)!}{(j!)^k k!} x_j^k$. Pour en savoir plus long sur ces polynômes, on peut consulter la section 3.3 de [1]. Nous sommes maintenant prêts à énoncer notre théorème, communément appelé "formule de Faà di Bruno".

Théorème 1.1.6 (Formule de Faà di Bruno) *Soient $A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{z^m}{m!}$ et $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}$ deux séries formelles avec $b_0 = 0$. Alors la composition formelle $C(z) = A(B(z))$ est bien définie et $C(z)$ est donnée par*

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!},$$

où

$$c_0 = a_0 \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{n,k}(b_1, b_2, \ldots, b_{n-k+1}),$$

avec les $B_{n,k}$, des polynômes exponentiels de Bell.

1.1.1 Règles de calcul pour les fonctions génératrices ordinaires

Nous allons maintenant donner la définition d'une fonction génératrice ordinaire ainsi que quelques règles de calcul sur ces fonctions. En effet, une bonne connaissance de ces règles permet de déterminer plus rapidement quelle fonction génératrice sera la plus adéquate pour résoudre tel ou tel problème de combinatoire.

Définition 1.1.7 *La notation $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ signifie que f est la fonction génératrice ordinaire de la suite $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, c'est-à-dire que $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.*

Règle 1.1 *Si $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, alors pour tout entier $h > 0$ nous aurons,*

$$\{a_{n+h}\}_{n=0}^{\infty} \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \frac{f - a_0 - \cdots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}.$$

Règle 1.2 *Si* $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. *et* P *est un polynôme, alors*

$$P(xD)f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \{P(n)a_n\}_{n=0}^{\infty} .$$

Règle 1.3 *Si* $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *et* $g \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, *alors*

$$fg \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} \right\}_{n=0}^{\infty} .$$

De la règle 1.3, on peut déduire le cas spécial où l'on élève une fonction génératrice ordinaire à la k-ième puissance.

Règle 1.4 *Soit* $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *et* k *un entier positif, alors*

$$f^k \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{n_1+n_2\cdots+n_k=n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} \right\}_{n=0}^{\infty} .$$

1.1.2 Règles de calcul pour les fonctions génératrices exponentielles

Voyons ce que deviennent les règles de calcul lorsque l'on s'intéresse à des fonctions génératrices exponentielles .

Définition 1.1.8 *La notation* $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *signifie que* f *est la fonction génératrice exponentielle de la suite* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. *c'est-à-dire que* $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$.

Règle 1.1′ Si $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, alors pour tout entier $h > 0$ nous aurons,

$$\{a_{n+h}\}_{n=0}^{\infty} \overset{fge}{\longleftrightarrow} D^h f.$$

Règle 1.2′ Si $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, et P est un polynôme. alors

$$P(xD)f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{P(n)a_n\}_{n=0}^{\infty} .$$

Règle 1.3′ Si $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $g \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, alors

$$fg \overset{fge}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r b_{n-r} \right\}_{n=0}^{\infty} .$$

Comme dans le cas des fonctions génératrices ordinaires , il est intéressant de voir ce qui se passe lorsque l'on élève à la k-ième puissance une fonction génératrice exponentielle .

Règle 1.4′ Soit $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ et k un entier positif. Alors

$$f^k \overset{fge}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{r_1+r_2\cdots+r_k=n} \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!} a_{r_1}a_{r_2}\cdots a_{r_k} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

1.2 La formule exponentielle

Dans cette section, nous allons "redécouvrir" la formule exponentielle. Cette formule trouve sa principale utilité lorsque l'on veut compter le nombre d'objets construits à partir de composantes connexes. Notons que les objets ainsi obtenus ne sont pas nécessairement connexes. Par exemple, sachant le nombre de graphes connexes étiquetés à 1, 2 et 3 sommets, que peut-on dire du nombre total de graphes étiquetés comportant 3 sommets ou moins? C'est à ce genre de question et à bien d'autres que la formule exponentielle nous permettra de répondre.

Nous emploierons l'approche de H. S. Wilf [13]. Commençons par quelques définitions suivies d'un exemple concret.

Définition 1.2.1 *Soit I un ensemble "d'images". Une* carte $C(E, i)$ *est une paire constituée d'un ensemble fini E (l'ensemble des "étiquettes") d'entiers positifs, et d'une image $i \in I$. Le* poids *de la carte C est $n = |E|$. Une carte de poids n est dite* standard *si l'ensemble $E = [n]$*[1].

Définition 1.2.2 *Une* main M *est un ensemble de cartes dont les étiquettes forment une partition de $[n]$ pour un certain entier n.*

Donc, si n est égal à la somme des poids des cartes d'une main M, alors les ensembles d'étiquettes des cartes de M sont deux à deux disjoints, non vides et leur réunion est $[n]$.

Définition 1.2.3 *Le* poids d'une main *est la somme des poids des cartes qui la constituent.*

[1] Où $[n] = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Définition 1.2.4 *Un* réétiquetage *d'une carte $C(E,i)$ à l'aide d'un ensemble E' sera noté $C(E',i)$ et est défini si $|E| = |E'|$. Si $E' = [|E|]$, on dit que le réétiquetage est* standard.

Définition 1.2.5 *Une* pile $\mathcal{P}$ *est un ensemble de cartes ayant toutes le même poids mais comportant toutes des images différentes. Le* poids d'une pile *est le poids commun à toutes ses cartes.*

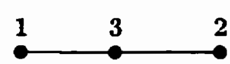
Définition 1.2.6 *Une* famille exponentielle $\mathcal{F}$ *est une collection de piles $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots$ où pour chaque n, la pile $\mathcal{P}_n$ est de poids n.*

Si $\mathcal{F}$ est une famille exponentielle, nous noterons le nombre de cartes de la pile $\mathcal{P}_n$ par p_n et nous appellerons *l'énumérateur de piles* de la famille $\mathcal{F}$ la fonction génératrice exponentielle $\mathcal{P}(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Commençons maintenant par donner l'exemple de la famille exponentielle $\mathcal{F}_1$ de tous les graphes étiquetés non dirigés. Un graphe G à n sommet sera dit *standard* si l'ensemble des étiquettes de ses sommets est $[n]$. Comme il y a $\binom{n}{2}$ arêtes possibles entre n sommets, il y a donc $2^{\binom{n}{2}}$ graphes étiquetés à n sommets. Décrivons maintenant ce que sera une carte de $\mathcal{F}_1$. Il existe une carte $C(E,i)$ pour tout graphe connexe G. Ici, E est l'ensemble des étiquettes des sommets de G. Avant de dire ce qu'est l'image i, définissons ce qu'est un réétiquetage standard.

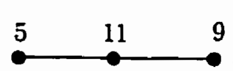
Si G possède n sommets, un *réétiquetage standard* de G se fait en renommant les sommets de G à l'aide de $[n]$, tout en préservant l'ordre.

L'image i de notre graphe G sera simplement donnée par G étiqueté de façon standard. Par exemple, une carte de poids 3 pourrait être

$C(E,i) = \Big(\{5, 9, 11\},$ 

$\Big).$

qui correspondrait au graphe suivant



Qu'est-ce qu'une main? Une main M est un ensemble de cartes dont les étiquettes partitionnent $[n]$, où n est le poids de la main. M correspond donc à un graphe standard même si les graphes qui le constituent peuvent ne pas l'être.

En résumé, l'ensemble de tous les graphes étiquetés forme une famille exponentielle que nous avons nommé $\mathcal{F}_1$. Chaque carte est un graphe connexe, chaque main est un graphe standard (pas nécessairement connexe) et chaque pile $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble de tous les graphes standards connexes à n sommets. Ici, p_n est le nombre de graphes standards connexes à n sommets et $m(n,k)$ est le nombre de graphes standards à n sommets constitués de k composantes connexes.

Introduisons maintenant deux dernières fonctions génératrices et nous pourrons ensuite démontrer les résultats qui nous amèneront à la formule exponentielle. Si l'on note par $m(n,k)$ le nombre de mains M de poids n ayant exactement k cartes, alors

$$\mathcal{M}(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} m(n,k) y^k \frac{x^n}{n!}.$$

Remarquons que cette fonction génératrice est de type mixte, c'est-à-dire qu'elle est exponentielle en x et ordinaire en y. Nous appellerons $\mathcal{M}(x,y)$ l'*énumérateur de mains à deux variables* de la famille $\mathcal{F}$. Par ailleurs, si $m(n) = \sum_k m(n,k)$, est le nombre de mains de poids n (sans restrictions sur le nombre de cartes), l'*énumérateur de mains à une variable* sera

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(x,1) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{m(n)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Par *fusion* de deux familles exponentielles $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ ayant des ensembles d'images I' et I'' disjoints, on entend l'opération $\oplus$ qui à $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ associe la famille exponentielle $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$. Les piles $\mathcal{P}_n$ de $\mathcal{F}$ sont obtenues par l'union des cartes des piles $\mathcal{P}'_n$ et $\mathcal{P}''_n$ pour chaque $n \geq 1$.

Lemme 1.2.7 (Lemme fondamental) *Soient $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ deux familles exponentielles et $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$ leur fusion. Soient aussi $\mathcal{M}'(x,y)$, $\mathcal{M}''(x,y)$ et $\mathcal{M}(x,y)$ respectivement les énumérateurs de mains à deux variables des familles exponentielles $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ et $\mathcal{F}$, alors*

$$\mathcal{M}(x,y) = \mathcal{M}'(x,y)\,\mathcal{M}''(x,y).$$

Démonstration. Soit M une main de $\mathcal{F}$ de poids n. Certaines de ses cartes proviennent de $\mathcal{F}'$ et d'autres de $\mathcal{F}''$. L'ensemble des cartes de $\mathcal{F}'$ forme une main M' de poids disons n' et de k' cartes qui ont été réétiquetées, en préservant l'ordre, avec un ensemble $S \subset [n]$. Donc, toute main M de $\mathcal{F}$ est uniquement déterminée par une main particulière M' de $\mathcal{F}'$, le choix des nouvelles étiquettes S qui renommeront M', et une autre main M'' de $\mathcal{F}''$ qui sera renommée, encore en préservant l'ordre, par $[n]-S$. D'où, le nombre de mains de poids n composées de k cartes est exactement

$$\begin{aligned} m(n,k) &= \sum_{n',k'} \binom{n}{n'} m'(n',k') m''(n-n',k-k'). \\ &= \left[\frac{x^n}{n!} y^k\right] \mathcal{M}'(x,y)\, \mathcal{M}''(x,y). \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 1.2.8 *Soit r un entier positif et $\mathcal{F}$ une famille exponentielle dont la pile $\mathcal{P}_r$ ne contient qu'une seule carte et où toutes les autres piles sont vides. Alors*

$$\mathcal{M}(x,y) = \exp\left[y\frac{x^r}{r!}\right].$$

Démonstration. Ici, $p_r = 1$ et pour $j \neq r$, $p_j = 0$. L'énumérateur de piles à une variable est donc $\mathcal{M}(x) = x^r/r!$. Une main M consiste donc en s copies de la seule carte existante. Son poids est donc sr. On en déduit que le nombre de mains de poids n constituées de k cartes est $m(n,k) = 0$, à moins que $n = kr$. Dans ce cas, combien de mains de poids n y a-t-il? Nous pouvons choisir les étiquettes de la première carte de $\binom{n}{r}$ façons, la deuxième de $\binom{n-r}{r}$ façons, jusqu'à la k-ième de $\binom{n-(k-1)r}{r} = 1$ façon. Comme l'ordre des étiquettes n'a pas d'importance, il y a donc

$$m(kr,k) = \frac{1}{k!}\frac{n!}{r!^k}$$

mains de poids $n = kr$.

L'énumérateur de mains à deux variables de cette famille exponentielle est donc donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x,y) &= \sum_{n,k} m(n,k) y^k \frac{x^n}{n!}, \\ &= \sum_k \frac{y^k x^{kr}}{k! r!^k}, \\ &= \exp\left[y\frac{x^r}{r!}\right]. \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 1.2.9 *Soit r un entier positif et $\mathcal{F}$ une famille exponentielle dont la pile $\mathcal{P}_r$ contient p_r cartes et où toutes les autres piles sont vides. Alors*

$$\mathcal{M}(x,y) = \exp\left[yp_r\frac{x^r}{r!}\right].$$

Démonstration. La preuve se fait par induction sur p_r. Pour $p_r = 1$, nous retrouvons le lemme 1.2.8. Supposons que le lemme tient pour $p_r = 1, 2, \ldots, m-1$ et soit $\mathcal{F}$ une famille exponentielle qui a m cartes dans sa r-ième pile. Alors $\mathcal{F}$ peut être vue comme la fusion d'une famille ayant $m-1$ cartes dans sa r-ème pile et d'une autre famille ne possédant qu'une seule carte dans cette pile. Par l'hypothèse d'induction et le lemme fondamental, l'énumérateur de mains à deux variables de cette famille exponentielle est donc donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(x,y) &= \exp\left[y(m-1)\frac{x^r}{r!}\right]\exp\left[y\frac{x^r}{r!}\right], \\ &= \exp\left[my\frac{x^r}{r!}\right]. \quad \Box\end{aligned}$$

Équipés de ce dernier lemme, nous sommes maintenant prêts à démontrer la formule exponentielle.

Théorème 1.2.10 (La formule exponentielle) *Soit $\mathcal{F}$ une famille exponentielle dont les énumérateurs de mains et de piles sont respectivement donnés par $\mathcal{M}(x,y)$ et $\mathcal{P}(x)$. Alors*

$$\mathcal{M}(x,y) = e^{y\mathcal{P}(x)}.$$

Plus précisément, le nombre de mains de poids n composées de k cartes est

$$(*) \qquad \begin{aligned} m(n,k) &= \left[y^k\frac{x^n}{n!}\right]e^{y\mathcal{P}(x)}, \\ &= \left[\frac{x^n}{n!}\right]\left\{\frac{\mathcal{P}(x)^k}{k!}\right\}.\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ une famille exponentielle quelconque. Nous pouvons représenter $\mathcal{F}$ comme la fusion d'une suite de familles exponentielles $\{\mathcal{F}_r\}_{r=1}^{\infty}$, où pour chaque

$\mathcal{F}_r$. seule la pile $\mathcal{P}_r$ contient p_r cartes et toutes les autres sont vides. Par le lemme fondamental, l'énumérateur de mains à deux variables de $\mathcal{F}$ est le produit des énumérateurs des $\mathcal{F}_r$. Le lemme 1.2.9 nous donne donc

$$\prod_{r=1}^{\infty} \exp\left[yp_r\frac{x^r}{r!}\right] = \prod_{r=1}^{\infty} e^{y\left(\frac{p_1x}{1!}+\frac{p_2x^2}{2!}+\cdots\right)} = e^{y\mathcal{P}(x)}. \quad \square$$

Corollaire 1.2.11 *Soit $\mathcal{F}$ une famille exponentielle, $\mathcal{P}(x)$ son énumérateur de piles et $\mathcal{M}(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, où m_n est le nombre de mains de poids n. Alors*

$$\mathcal{M}(x) = e^{\mathcal{P}(x)}.$$

Corollaire 1.2.12 (Formule exponentielle avec nombre de cartes restreint) *Soit T un ensemble d'entiers positifs, $e_T(x) = \sum_{n\in T} x^n/n!$ et $m_n(T)$ le nombre de mains de poids n dont le nombre de cartes est dans l'ensemble permis T. Alors*

$$\{m_n(T)\}_{n=0}^{\infty} \overset{fge}{\longleftrightarrow} e_T(\mathcal{P}(x)).$$

Démonstration. Il suffit de sommer de part et d'autre l'équation (*) de l'énoncé de la formule exponentielle pour les $k \in T$. $\square$

1.3 Applications de la formule exponentielle

Dans cette présente section, nous allons donner des applications de la formule exponentielle et du concept de fonction génératrice en général. Certains de ces exemples auront un but purement "pédagogique" tandis que d'autres serviront plus tard à illustrer la méthode de Hayman ou d'autres approches analytiques.

1.3.1 Nombre de graphes connexes

Pour ce premier exemple, revenons à notre famille exponentielle $\mathcal{F}_1$. Ici, nous connaissons la fonction génératrice $\mathcal{M}(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \{m(n)\}_{n=0}^{\infty}$ car $m(n)$, le nombre total de graphes à n sommets, est donné par $m(n) = 2^{\binom{n}{2}}$. D'où

$$\mathcal{M}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}x^n.$$

Cette fonction génératrice, vue comme une série formelle, ne converge pour aucune valeur de x différente de zéro. On ne pourra donc en tirer aucune information par des méthodes analytiques, comme celle de Hayman par exemple. Ceci dit, nous pouvons quand même obtenir des résultats intéressants grâce à la machinerie que nous avons développée.

Nous allons maintenant trouver une formule de récurrence pour p_n, le nombre de graphes connexes à n sommets, en appliquant à $\mathcal{M}(x)$ la suite d'opérations formelles "$x(d/dx)\log$". Ces opérations peuvent paraître bizarres à première vue mais elles constituent un "truc" standard de la théorie des fonctions génératrices.

Première étape: appliquons le log.

$$\sum \frac{p_k}{k!}x^k = \log\left(\sum \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}x^n\right).$$

Deuxième étape: dérivons.

$$\sum \frac{kp_k}{k!}x^{k-1} = \frac{\sum \frac{n2^{\binom{n}{2}}}{n!}x^{n-1}}{\sum \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}x^n}.$$

Troisième étape: multiplions par x et débarrassons-nous des fractions.

$$\left(\sum \frac{kp_k}{k!}x^k\right)\left(\sum \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}x^n\right) = \sum \frac{n2^{\binom{n}{2}}}{n!}x^n.$$

Nous avons obtenu une équation de la forme $fg = h$ où f et g sont deux fonctions génératrices exponentielles. Par la règle 1.3′, nous savons que

$$\left(\sum_{k\geq 0} \frac{kp_k}{k!}x^k\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}x^n\right) \overset{fge}{\longleftrightarrow} \left\{\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}rp_r2^{\binom{m-r}{2}}\right\}_{m=0}^{\infty}.$$

En égalant les coefficients de $x^n/n!$ de chaque côté de notre équation nous obtenons

$$n2^{\binom{n}{2}} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}rp_r2^{\binom{n-r}{2}},$$

relation qui nous permet de calculer récursivement les p_r.

1.3.2 Nombres de Bell et de Stirling du second ordre

Notre deuxième exemple sera de trouver la fonction génératrice associée aux nombres de Bell et de Stirling du second ordre.

Commençons par rappeler ce que sont ces nombres. Un nombre de Stirling du second ordre $\left\{ {n \atop k} \right\}$ est le nombre de façons de partitionner $[n]$ en k classes. Le nombre de Bell $b(n)$ est le nombre total de partitions de $[n]$. Il est donc clair que

$$b(n) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Introduisons une nouvelle famille exponentielle $\mathcal{F}_2$ comme suit. Pour chaque $n \geq 1$, la pile $\mathcal{P}_n$ ne contient qu'une seule carte de poids n. Pour la carte de la pile $\mathcal{P}_n$, l'étiquette est l'ensemble $[n]$ et l'image n'a pas d'importance car cette pile ne contient pas d'autres cartes. Dans cette famille exponentielle, le nombre de mains de poids n composées de k cartes est égal au nombre de partitions de $[n]$ en k classes et donc, par définition, à $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Pour appliquer la formule exponentielle, il faut d'abord calculer l'énumérateur de piles $\mathcal{P}(x)$. Mais comme il n'y a qu'une seule carte dans chaque pile, $p_n = 1$ pour chaque $n \geq 1$. Nous avons donc

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n \geq 1} p_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1.$$

Par la formule exponentielle, l'énumérateur de mains à deux variables est donc

$$\mathcal{M}(x, y) = e^{y(e^x - 1)},$$

et en particulier

$$\begin{aligned} \left\{ {n \atop k} \right\} &= \left[y^k \frac{x^n}{n!} \right] \mathcal{M}(x, y), \\ &= \left[y^k \frac{x^n}{n!} \right] e^{y(e^x - 1)} = \left[\frac{x^n}{n!} \right] \left\{ \frac{(e^x - 1)^k}{k!} \right\}. \end{aligned}$$

Le corollaire 1.2.11 nous apprend également que $b(n)$, le nombre de partitions de n, est donné par

$$b(n) = \left[\frac{x^n}{n!} \right] \mathcal{M}(x) = \left[\frac{x^n}{n!} \right] e^{\mathcal{P}(x)} = \left[\frac{x^n}{n!} \right] \sum_{k \geq 0} \frac{(e^x - 1)^k}{k!}. \quad \square$$

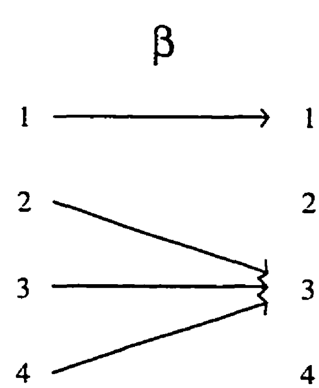
1.3.3 Fonctions idempotentes sur $[n]$

Dans cet exemple, nous allons chercher la fonction génératrice exponentielle de la suite $\{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$, où $h(n)$ est le nombre de fonctions β idempotentes sur $[n]$, c'est-à-dire celles pour lesquelles $\beta(\beta(i)) = \beta(i)$ pour tout $i \in [n]$. Remarquons tout de suite qu'une fonction β est idempotente si et seulement si pour tout $i \in [n]$, l'ensemble $\beta^{-1}(i)$ est vide ou contient i.

Nous allons maintenant introduire une nouvelle famille exponentielle $\mathcal{F}_3$ en modifiant légèrement la famille $\mathcal{F}_2$ de l'exemple 1.3.2. Pour chaque $n \geq 1$, la pile $\mathcal{P}_n$ contient n cartes et pour chacune d'elles, l'étiquette est $[n]$ et l'image, un élément fixé de $[n]$. Une petite digression sera nécessaire avant que n'apparaisse la pertinence de cette famille à notre problème.

Grâce à la remarque précédente, nous savons que toute fonction idempotente β sur $[n]$, peut être obtenue à l'aide d'une partition Π de $[n]$ à laquelle, pour chaque bloc B_j, nous associons à tous les éléments de B_j un élément y fixe de ce même bloc. En termes de notre famille exponentielle, une telle opération est équivalente à former une main à l'aide d'autant de cartes de $\mathcal{F}_3$ que Π compte de blocs. Voici un exemple.

La fonction $\beta : [n] \to [n]$ définie par le diagramme



est bien idempotente. Soit $\Pi_\beta = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$, la partition de $[4]$ correspondante. Associons au bloc $\{1\}$ l'élément 1 et au bloc $\{2, 3, 4\}$ l'élément 3. La main équivalente à cette opération sera composée des deux cartes suivantes,

$$C_1 = C(\{1\}, 1) \quad \text{et} \quad C_2 = C(\{2, 3, 4\}, 3),$$

où C_1 et C_2 sont respectivement des réétiquetages des cartes standards $C'_1 = C([1], 1)$

et $\mathcal{C}'_2 = \mathcal{C}([3], 2)$. De cette observation, il suit que $m(n)$, le nombre de mains de poids n, est exactement $h(n)$, le nombre de fonctions idempotentes sur $[n]$. Par la formule exponentielle, la fonction génératrice exponentielle de la suite $\{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$ sera donc connue une fois que nous aurons calculé $\mathcal{P}(x)$. Par notre construction de $\mathcal{F}_3$, $p_n = n$ et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{x^n}{n!}, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^n}{n!}, \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x.\end{aligned}$$

Comme $m(n) = h(n)$, il suit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n) \frac{x^n}{n!} = \exp\left[xe^x\right],$$

d'où $h(n)$ est donné par

$$\begin{aligned}h(n) &= \left[\frac{x^n}{n!}\right] \exp\left[xe^x\right], \\ &= \left[\frac{x^n}{n!}\right] \sum_{k\geq 0} \frac{x^k e^{kx}}{k!}. \quad \square\end{aligned}$$

1.3.4 Graphes 2-réguliers

Nous terminerons ce chapitre en trouvant la fonction génératrice exponentielle de la suite $\{g(n)\}_{n=0}^{\infty}$, où $g(n)$ est le nombre de graphes 2-réguliers à n sommets. Rappelons qu'un graphe 2-régulier est un graphe étiqueté non dirigé, où chaque sommet est de degré 2, c'est-à-dire que de chaque sommet partent deux arêtes.

Comme un tel graphe est constitué d'une union disjointe de cycles non dirigés, les cartes de notre nouvelle famille exponentielle $\mathcal{F}_4$ seront elles aussi des cycles non dirigés. Pour $n \leq 2$, il n'y a aucun cycle non dirigé. Pour $n \geq 3$, le nombre de cartes dans la pile $\mathcal{P}_n$ est donné par $(n-1)!/2$, le nombre d'arrangements circulaires de n éléments. L'énumérateur de piles est donc

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) &= \sum_{n\geq 3} \frac{(n-1)!}{2n!} x^n, \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1}{1-x}\right) - x - \frac{x^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Par la formule exponentielle. la fonction génératrice exponentielle de la suite $\{g(n)\}_{n=0}^{\infty}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} g(n)\frac{x^n}{n!} &= \exp\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right], \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2}}{\sqrt{1-x}}. \quad \square\end{aligned}$$

Chapitre II

Méthode de Hayman

2.1 Motivation

Combinatorialists use recurrence, generating functions, and such transformations as the Vandermonde convolution; others, to my horror, use contour integrals, differential equations, and other resources of mathematical analysis. Handbook of Combinatorics (1995)

J. Riordan (1968)

Cette citation exprime bien le choc causé par l'avènement des méthodes analytiques dans l'étude des problèmes d'analyse combinatoire traditionnelle. Pour estimer asymptotiquement les coefficients de fonctions génératrices à croissance rapide, la plus performante de ces méthodes est probablement la méthode du point de selle. Elle repose sur le fait que pour des fonctions holomorphes, les points de départ et d'arrivée d'un chemin simple sont suffisants pour déterminer le résultat d'une intégrale de ligne: nous pouvons donc choisir le chemin d'intégration à notre guise[1] (sauf pour les points de départ et d'arrivée bien entendu).

[1]Note: Ceci est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy.

Supposons, pour le reste de la discussion, que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe sur $|z| < R \leq \infty$, $R > 0$, et qu'il existe une constante positive r_0 telle que

$$\text{(I)} \qquad \max_{|z|=r} |f(z)| = f(r), \qquad \text{pour } r_0 < r < R.$$

Cette dernière hypothèse est clairement satisfaite par les fonctions holomorphes à coefficients réels non négatifs, lesquelles sont très communes en analyse combinatoire. Supposons également que $z = r$ est l'unique point où (I) est atteint. Si tel n'est pas le cas, il y a presque toujours une certaine périodicité dans l'estimation des coefficients a_n. On peut souvent ramener le problème au cas où il y a unicité grâce à un changement de variables, ou encore en réécrivant $f(z)$ comme une somme de fonctions plus simples, et en travaillant sur chacune d'elles individuellement.

Cela dit, la première étape de l'estimation des a_n par la méthode du point de selle est justement de le déterminer. Sous nos hypothèses, ce sera un point $r_n \in (r_0, R)$ qui minimisera l'expression $f(r)/r^n$. Ce r_n sera le plus souvent unique, du moins pour des n assez grands[2]. On applique ensuite la formule de Cauchy pour les dérivées,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

avec le contour $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_n\}$ afin d'obtenir l'approximation suivante,

$$a_n \sim \frac{f(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty,$$

où $b(r) = r\left(r\frac{f'(r)}{f(r)}\right)'$. Ce choix de contour est motivé par le fait que pour plusieurs fonctions, l'intégrande est importante sur Γ seulement au voisinage de $z = r_n$, les contributions de part et d'autre de $z = r_n$ ne s'annullent pas et le reste de l'intégrale est négligeable. Par le théorème de Cauchy, nous savons que tout chemin simple fermé aurait donné la même solution. Le problème, c'est que pour la plupart d'entre eux, l'intégrande ne devient pas négligeable loin de l'axe réel positif ou qu'il se produit trop de simplifications pour obtenir des estimations utiles.

Bien que séduisante, l'utilisation de cette méthode demande toutefois une certaine prudence. À preuve, considérons simplement la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$, où $a_n = 1$ pour

[2]Note: S'il existe plusieurs $r \in (r_0, R)$ minimisant $f(r)/r^n$, la fonction $f(z)$ est "pathologique" et la méthode du point de selle sera inapplicable. Toutefois, dans le cas où les a_n sont tous positifs, l'unicité est garantie.

tout $n \geq 0$. Le point de selle sera le point r_n qui minimisera $f(r)/r^n$. Après de simples calculs, il suit que r_n est défini par l'équation $r_n f'(r_n)/f(r_n) = n$. Dans l'exemple qui nous intéresse, $r_n = \frac{n}{n+1}$ et $b(r_n) = n(n+1)$. Si l'approximation fournie par la méthode du point de selle était valide nous aurions

$$\begin{aligned} a_n &\sim \frac{f(r_n)}{r_n^n\sqrt{2\pi b(r_n)}}, \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{2\pi n(n+1)}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \\ &\sim \frac{e}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Mais quelque chose cloche car $e/\sqrt{2\pi} = 1.0844\ldots \neq 1$. La méthode du point de selle ne s'applique donc pas dans ce cas. La principale raison de cet échec est qu'ici la singularité de $f(z)$ en $z = 1$ n'est pas assez importante. Ceci entraîne que l'intégrande ne devient pas négligeable en dehors d'un petit voisinage de $z = r_n$ sur Γ. Cet exemple illustre bien l'importance du type de singularité dans le choix d'une méthode de résolution analytique. Au chapitre IV, nous verrons comment aborder ce genre de problème.

Malgré sa puissance et sa flexibilité, la méthode du point de selle demeure néanmoins compliquée à utiliser dans toute sa généralité. Il n'existe également pas de caractérisation simple des situations auxquelles elle s'applique, ni de la qualité des estimations qu'elle fournit. C'est ici que la méthode de Hayman entre en scène. En 1956, celui-ci publie l'article "*A Generalisation of Stirling's Formula*" [5], dans lequel il introduit une classe de fonctions

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

holomorphes sur $|z| < R$, où $0 < R \leq \infty$, et réelles pour tout z réel, que nous appellerons H-admissibles [3] . Moyennant quelques hypothèses sur la croissance de ces fonctions, Hayman appliqua la méthode du point de selle afin d'obtenir une relation asymptotique pour les coefficients a_n. De plus, il montra également que si $f(z)$ et $g(z)$ sont H-admissibles, alors $\exp[f(z)]$ et $f(z)g(z)$ le seront aussi. Notons que plusieurs fonctions génératrices définissent effectivement des fonctions holomorphes remplissant les conditions de Hayman.

[3]Note: Dans son article, Hayman utilise le terme "admissible" mais comme nous rencontrerons plus tard un autre type d'admissibilité, nous utiliserons ici le terme "H-admissible".

Considérant les nombreuses applications de la formule exponentielle et les propriétés de fermeture des fonctions H-admissibles, il n'est donc pas étonnant que la méthode de Hayman soit d'une grande importance en analyse combinatoire énumérative.

Dans ce chapitre, nous allons reprendre en détail les sections de l'article de Hayman traitant des propriétés des fonctions H-admissibles.

2.2 Définition d'une fonction H-admissible suivie d'un exemple

Énonçons d'entrée de jeu la définition d'une fonction H-admissible.

Définition 2.2.1 (H-admissibilité) *Supposons que* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est holomorphe sur* $|z| < R$ *où* $0 < R \leq \infty$. *Posons*

$$a(r) = r\frac{f'(r)}{f(r)}$$

et

$$b(r) = ra'(r) = r\frac{f'(r)}{f(r)} + r^2\frac{f''(r)}{f(r)} - r^2\left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2.$$

Nous dirons que la fonction $f(z)$ *est* H-admissible *si elle respecte les quatre conditions suivantes:*

(a) $f(z)$ *est réelle pour tout* $z \in \mathbb{R}$ *et il existe une constante positive* $r_0 < R$ *telle que*

$$f(r) > 0 \qquad \text{si } r_0 < r < R;$$

(b) $b(r) \to \infty$ *lorsque* $r \to R$;

(c) il existe une fonction $\delta(r)$, *définie sur* $r_0 < r < R$ *et satisfaisant* $0 < \delta(r) < \pi$, *telle que uniformément pour* $|\theta| < \delta(r)$,

$$f\left(re^{i\theta}\right) \sim f(r)e^{i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r)}, \qquad \text{lorsque } r \to R;$$

(d) si $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$ alors uniformément en θ,

$$f\left(re^{i\theta}\right) = o\left[\frac{f(r)}{\sqrt{b(r)}}\right], \qquad \textit{lorsque } r \to R.$$

À cause de leur caractère "uniforme", les conditions (c) et (d) méritent un peu plus d'attention. Par exemple, la condition (c) signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe r_ϵ tel que

$$\left|\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{f(r)e^{i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r)}} - 1\right| \leq \epsilon,$$

pour tout $r > r_\epsilon$ et $|\theta| < \delta(r)$. Soulignons que la condition d'uniformité est très importante en (c) et en (d) de la définition de H-admissibilité. En effet, le manque de convergence uniforme est souvent responsable de l'incapacité des méthodes analytiques à produire des estimés utiles.

Soit maintenant $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction H-admissible sur $|z| < R$ avec $0 < R \leq \infty$. Notons[4] $M(r, f) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$ et définissons les fonctions suivantes.

$$\begin{aligned}\alpha(r) &= \frac{d(\log M(r))}{d(\log r)}, \\ \beta(r) &= \frac{d(\alpha(r))}{d(\log r)}.\end{aligned}$$

Par un théorème de convexité d'Hadamard ([6], chapitre XII, §6), nous savons que $\log M(r)$ est une fonction croissante et convexe de $\log r$. Il suit que $\alpha(r)$ est non négative pour $r > 0$. En effet, supposons que pour un certain r_1 strictement positif, $\alpha(r_1) < 0$. Dans ce cas,

$$\alpha(r_1) = \left.\frac{d(\log M(r))}{d(\log r)}\right|_{r=r_1} < 0$$

implique que

$$\left.\frac{d(\log M(r))}{dr}\right|_{r=r_1} < 0,$$

[4]Note: Si le choix de la fonction f ne peut porter à confusion, nous utiliserons simplement la notation $M(r)$ au lieu de $M(r, f)$.

ce qui contredit le principe du maximum. Aussi, par la convexité de $\log M(r)$ par rapport à $\log r$, $\alpha(r)$ est croissante. Pour la même raison, $\beta(r)$ est non négative pour $r > 0$. Aussi, pour chaque entier $n > 0$,

$$\begin{aligned} \alpha(r) - n &= \frac{d}{d(\log r)} \log\left(\frac{M(r)}{r^n}\right), \\ &= r\frac{d}{dr}\log\left(\frac{M(r)}{r^n}\right), \\ &= \frac{r^{n+1}}{M(r)}\frac{d}{dr}\log\left(\frac{M(r)}{r^n}\right). \end{aligned}$$

De cela et du fait que pour f H-admissible, $f(r)/r^n \to \infty$ lorsque $r \to R$ (nous le démontrerons en 2.4), il suit que le minimum de $M(r)/r^n$ sur $0 < r < R$ est donné par

$$M_n = \frac{M(r_n)}{r_n^n},$$

où r_n est l'unique solution de l'équation $\alpha(r_n) = n$.

L'intérêt des fonctions $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ vient du fait que si f est une fonction H-admissible, nous montrerons (section 2.5) que pour $r_0 < r < R$ nous avons $M(f, r) = f(r)$. Après substitution dans $\alpha(r)$ et $\beta(r)$, nous constatons par de simples calculs que sur $r_0 < r < R$,

$$\alpha(r) = a(r) \quad \text{et} \quad \beta(r) = b(r).$$

Les propriétés que nous avons déduites pour $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ seront donc partagées par $a(r)$ et $b(r)$ sur le domaine restreint $r_0 < r < R$. Cette restriction ne causera cependant pas de problème car nous ne nous intéresserons qu'à des phénomènes se produisant lorsque r tend vers R.

Pour une fonction f simplement holomorphe, l'inégalité de Cauchy nous assure que $|a_n| \leq M_n$. Notre principal objectif sera de montrer que pour les fonctions H-admissibles, la relation asymptotique

$$a_n \sim \frac{M_n}{\sqrt{2\pi b(r_n)}}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty,$$

est vérifiée. Notons que par la remarque précédente, r_n est uniquement déterminé par l'équation $a(r_n) = n$.

Donnons tout de suite un exemple simple de fonction H-admissible. Soit $f(z) = e^z$. Cette fonction est holomorphe dans tout le plan complexe ($R = \infty$), réelle pour tout z réel et $e^r > 0$ pour tout $r \geq 0$. Il ne reste donc qu'à vérifier que e^z satisfait les conditions 2.2.1 (b), (c), (d) pour montrer que e^z est H-admissible.

Par de simples calculs, nous trouvons $a(r) = b(r) = r$. La condition (b) est donc satisfaite. Vérifions que (c) et (d) le sont également avec $\delta(r) = r^{-1/3}$. Pour (c), nous avons uniformément pour $|\theta| < \delta(r)$,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \left| \frac{\exp\left[re^{i\theta}\right]}{e^r \exp\left[i\theta r - \frac{1}{2}\theta^2 r\right]} \right| &= \lim_{r\to\infty} \frac{e^{r\cos\theta}}{e^r \exp\left[-\frac{1}{2}\theta^2 r\right]}. \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pour (d), nous avons uniformément sur $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \left| \frac{\exp\left[re^{i\theta}\right]\sqrt{r}}{e^r} \right| &= \lim_{r\to\infty} \frac{e^{r\cos\theta}\sqrt{r}}{e^r}. \\ &= \lim_{r\to\infty} e^{r(\cos\theta - 1)}\sqrt{r}. \\ &= \lim_{r\to\infty} \exp\left[r\left(1 - \frac{\theta^2}{2} + O\left[\theta^3\right] - 1\right)\right]\sqrt{r}. \\ &\leq \lim_{r\to\infty} \exp\left[\left(-\frac{1}{2}r^{\frac{1}{3}} + O(1)\right)\right]\sqrt{r}. \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction $f(z) = e^z$ est donc H-admissible.

Remarquons qu'en général, il est souvent difficile de trouver directement une fonction $\delta(r)$ satisfaisant les conditions (c) et (d) de la définition 2.2.1. Pour contourner ce problème, nous démontrerons (section 2.6) certaines propriétés de fermeture et de robustesse des fonctions H-admissibles qui, dans plusieurs cas, nous faciliteront grandement la tâche.

Comme tout au long de ce chapitre nous allons travailler avec des relations asymptotiques, démontrons tout de suite un résultat auquel nous ferons souvent appel.

Lemme 2.2.2 (Addition de relations asymptotiques) *Soient $A(r) \sim B(r)$ et $C(r) \sim D(r)$ lorsque $r \to R$. Supposons de plus que toutes ces quantités sont positives. Alors*

$$A(r) + C(r) \sim B(r) + D(r) \qquad \textit{lorsque } r \to R.$$

Démonstration. Par définition du symbole "$\sim$", nous avons

$$A(r) = B(r)(1 + o(1)) \quad \text{et} \quad C(r) = D(r)(1 + o(1)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{r \to R} \frac{A(r) + C(r)}{B(r) + D(r)} &= \lim_{r \to R} \left\{ \frac{B(r) + D(r)}{B(r) + D(r)} + \frac{B(r)o(1) + D(r)o(1)}{B(r) + D(r)} \right\}. \\ &= 1, \end{aligned}$$

car $B(r) > 0$ et $D(r) > 0$ implique $\frac{B(r)}{B(r) + D(r)} < 1$ et $\frac{D(r)}{B(r) + D(r)} < 1$. □

2.3 Théorème principal et corollaires

Dans cette section nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.3.1 (Théorème principal) *Supposons que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une fonction H-admissible sur $|z| < R$, et définissons $a_n = 0$ si $n < 0$. Alors*

$$a_n r^n = \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(a(r) - n)^2}{2b(r)} \right] + o(1) \right\}. \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

uniformément pour tout entier n.

Démonstration. Ce théorème est une conséquence de la définition d'admissibilité. Pour tout entier n et pour tout r tel que $0 < r < R$, nous avons

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{2\pi - \delta} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta,$$

où $\delta = \delta(r)$ est défini comme en 2.2.1 (c) et (d). Réécrivons $a_n r^n$ comme la somme des deux intégrales I_1 et I_2 où

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi - \delta} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta.$$

Pour I_1, nous avons directement de 2.2.1 (d) que, uniformément en n,

$$I_1 = o\left[\frac{f(r)}{\sqrt{b(r)}} \right], \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

L'évaluation de I_2 demande plus de travail. Par 2.2.1 (c), nous pouvons écrire I_2 comme

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{f(r)}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[1+o(1)]e^{i[a(r)-n]\theta-\frac{1}{2}b(r)\theta^2}d\theta, \\ &= \frac{f(r)}{2\pi}\left\{\int_{-\delta}^{\delta} e^{i[a(r)-n]\theta-\frac{1}{2}b(r)\theta^2}d\theta + o\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}b(r)\theta^2}d\theta\right]\right\}. \\ &= \frac{f(r)}{2\pi}\left\{\int_{-\delta}^{\delta} e^{i[a(r)-n]\theta-\frac{1}{2}b(r)\theta^2}d\theta + o\left[b(r)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}, \qquad \text{lorsque } r \to R. \end{aligned}$$

Par 2.2.1 (d), nous avons que

$$\lim_{r\to R}\frac{f(re^{i\delta})\sqrt{b(r)}}{f(r)} = 0,$$

et comme 2.2.1 (c) nous assure que

$$\frac{|f(re^{i\delta})|}{f(r)} \sim e^{-\frac{1}{2}b(r)\delta^2}, \qquad \text{lorsque } r \to R,$$

nous aurons

$$\lim_{r\to R} e^{-\frac{1}{2}b(r)\delta^2}\sqrt{b(r)} = 0.$$

Ceci montre que $e^{-b(r)\delta^2/2} = o\left[b(r)^{-1/2}\right]$ et aussi, par 2.2.1 (b), que $b(r)\delta^2 \to \infty$. Revenons à I_2 et faisons le changement de variables suivant. Posons $y = \theta\,(b(r)/2)^{1/2}$ et $c = (a(r)-n)\,(2/b(r))^{1/2}$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{f(r)}{2\pi}\left\{\int_{-\delta(r)\sqrt{b(r)/2}}^{\delta(r)\sqrt{b(r)/2}} e^{-y^2+icy}\sqrt{\frac{b(r)}{2}}dy + o\left[b(r)^{-\frac{1}{2}}\right]\right\}, \\ &= \frac{f(r)}{\pi\sqrt{2b(r)}}\left\{\int_{-\delta(r)\sqrt{b(r)/2}}^{\delta(r)\sqrt{b(r)/2}} e^{-y^2+icy}dy + o(1)\right\}, \qquad \text{lorsque } r \to R. \end{aligned}$$

Comme $b(r)\delta^2 \to \infty$, nous pouvons passer à la limite et simplifier les bornes afin d'obtenir

$$I_2 = \frac{f(r)}{\pi\sqrt{2b(r)}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2+icy}dy + o(1)\right\}.$$

En complétant le carré de l'exponentielle, nous pouvons encore simplifier l'intégrale de I_2, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2+icy} dy, \\ &= e^{-\frac{c^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-ic/2)^2} dy, \\ &= e^{-\frac{c^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{c^2}{4}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{f(r)}{\pi\sqrt{2b(r)}} \left\{ \sqrt{\pi} e^{-\frac{c^2}{4}} + o(1) \right\}, \\ &= \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(a(r)-n)^2}{2b(r)} \right] + o(1) \right\}, \qquad \text{lorsque } r \to R. \end{aligned}$$

En combinant l'information obtenue sur I_1 et I_2, il suit que

$$\begin{aligned} a_n r^n = I_1 + I_2 &= o\left[\frac{f(r)}{\sqrt{b(r)}} \right] + \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(a(r)-n)^2}{2b(r)} \right] + o(1) \right\}, \\ &= \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(a(r)-n)^2}{2b(r)} \right] + o(1) \right\} \qquad \text{lorsque } r \to R. \quad \square \end{aligned}$$

Revenons à la fonction $f(z) = e^z$ que nous savons être H-admissible. Comme $a(r) = r$, il suit que $r_n = n$. Nous pouvons donc appliquer le théorème principal avec $r = r_n$ afin d'obtenir

$$a_n n^n = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} \{1 + o(1)\}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty,$$

d'où

$$\frac{1}{n!} = a_n \sim \frac{e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty,$$

ce qui est la formule de Stirling.

Du théorème principal, Hayman tire quatre corollaires importants.

Corollaire 2.3.2 *La fonction $a(r)$ telle que définie en 2.2.1 est positive croissante pour $q' < r < R$. tend vers l'infini lorsque $r \to R$. et*

$$b(r) = o\left[a(r)^2\right], \qquad \textit{lorsque } r \to R.$$

Démonstration. Par la définition 2.2.1 (b), nous savons que $b(r) = ra'(r) \to \infty$ lorsque $r \to R$. La fonction $a(r)$ est donc croissante sur un certain intervalle $q < r < R$. Il suit que $a(r)$ est finalement positive ou que $a(r)$ reste bornée lorsque $r \to R$. Pour exclure cette dernière possibilité, posons $n = -1$ dans le théorème principal. En laissant tendre $r \to R$, nous obtenons

$$0 = \lim_{r \to R} \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left[\exp\left[-\frac{(a(r)+1)^2}{2b(r)}\right] + o(1)\right],$$

ce qui entraine

$$\text{(I)} \qquad \exp\left[-\frac{(a(r)+1)^2}{2b(r)}\right] = o(1)$$

et de ce fait

$$\frac{(a(r)+1)^2}{2b(r)} \to \infty, \qquad \text{lorsque } r \to R,$$

ce qui contredit 2.2.1 (b) si $a(r)$ reste bornée lorsque $r \to R$. La fonction $a(r)$ est donc croissante et positive sur un intervalle $q' < r < R$ et tend vers l'infini lorsque $r \to R$. Par (I) nous avons $b(r) = o\left[(a(r)+1)^2\right]$ et comme $a(r) \to \infty$. $b(r) = o\left[a(r)^2\right]$. □

Corollaire 2.3.3 *Si r_n est défini par $a(r_n) = n$ et si $r_{N_0} > r_0$. alors la suite $\{r_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ est croissante. $\lim_{n \to \infty} r_n = R$ et*

$$a_n \sim \frac{f(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}}, \qquad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

Démonstration. Par définition des r_n et le fait que $a(r)$ est continue et croissante à partir de r_0, il suit que les $r_n > r_0$ forment une suite croissante majorée par R. Cette suite admet donc une limite. Supposons que $\lim_{n \to \infty} r_n = R' < R$. Par le corollaire 2.3.2 et le fait que $a(r)$ est continue, il existe une constante C telle que $a(R') \leq C < \infty$, ce qui contredit le fait que $\lim_{n \to \infty} a(r_n) = \lim_{n \to \infty} n = \infty$.

Encore par le corollaire 2.3.2, pour tout $n > a(r_0)$, il existera un unique r_n tel que $a(r_n) = n$ avec $r_0 < r_n < R$. D'où

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{f(r)}{r^n\sqrt{2\pi b(r)}}\left\{\exp\left[-\frac{(a(r)-n)^2}{2b(r)}\right] + o(1)\right\}, \\ &= \frac{f(r_n)}{r_n^n\sqrt{2\pi b(r_n)}}(1+o(1)), \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. □

Corollaire 2.3.4 *Soit* $\mu(r) = \max\limits_{0\le n<\infty} |a_n|r^n = a_{N(r)}r^{N(r)}$ *le plus grand terme de la série qui définit* $f(r)$. *Si* $N(r)$ *est son indice alors*

$$\mu(r) \sim \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \qquad et \qquad N(r) = a(r) + o[b(r)^{\frac{1}{2}}] \sim a(r),$$

lorsque $r \to R$.

Démonstration. Du théorème principal, nous avons

$$\mu(r) = \max_{0\le n<\infty} |a_n|r^n \le \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}[1+o(1)], \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

car, pour tout r,

$$\exp\left[-\frac{(a(r)-n)^2}{2b(r)}\right] \le 1.$$

Pour obtenir une borne inférieure pour chaque r, choisissons $n(r) < a(r)$ de telle sorte que n soit l'entier le plus près de $a(r)$. Avec ce choix de n,

$$\exp\left[-\frac{(a(r)-n(r))^2}{2b(r)}\right] \le 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{r\to R}\exp\left[-\frac{(a(r)-n(r))^2}{2b(r)}\right] = 1$$

car $b(r) \to \infty$. Posons $\epsilon(r) = \frac{(a(r)-n(r))^2}{2b(r)}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \mu(r) &\ge \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}\left\{\exp[-\epsilon(r)] + o(1)\right\}, \\ &> \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}\left\{1 - (1-\exp[-\epsilon(r)]) + o(1)\right\}, \\ &= \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}\left\{1 + o(1)\right\}, \end{aligned}$$

car $(1 - \exp[-\epsilon(r)]) = o(1)$. Grâce aux bornes supérieures et inférieures ainsi trouvées. il suit que

$$\textbf{(I)} \qquad \mu(r) \sim \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}. \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

Soit maintenant ϵ arbitraire et $N(r)$ l'indice du plus grand terme de f. Supposons que $[N(r) - a(r)]^2 > \epsilon^2 b(r)$ pour des r arbitrairement près de R. Grâce au théorème principal. nous avons

$$\begin{aligned}
\mu(r) &= a_{N(r)} r^{N(r)}, \\
&= \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(a(r) - N(r))^2}{2b(r)} \right] + o(1) \right\}, \\
&< \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left\{ \exp\left[-\frac{\epsilon^2}{2} \right] + o(1) \right\}, \qquad \text{lorsque } r \to R \text{ par ces valeurs.}
\end{aligned}$$

Aussi,

$$\lim_{r\to R} \frac{\mu(r)}{f(r)/\sqrt{2\pi b(r)}} \leq \lim_{r\to R} \left\{ \exp\left[-\frac{\epsilon^2}{2} \right] + o(1) \right\} < 1.$$

ce qui contredit (I). Il existe donc un r_ϵ tel que pour tout $r_\epsilon < r < R$ nous avons

$$[N(r) - a(r)]^2 \leq \epsilon^2 b(r),$$

et donc

$$|N(r) - a(r)| \leq \epsilon\sqrt{b(r)}.$$

Par le corollaire 2.3.2, cela revient à dire que

$$\begin{aligned}
N(r) &= a(r) + o[\sqrt{b(r)}], \\
&\sim a(r). \quad \square
\end{aligned}$$

Corollaire 2.3.5 *Si r_n est défini comme au corollaire 2.3.3, alors*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{a_n}{a_{n-1}} \sim r_n^{-1}, \qquad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

Démonstration. Du théorème principal nous avons

$$\begin{aligned} a_{n+p}r_n^{n+p} &= \frac{f(r_n)}{\sqrt{2\pi b(r_n)}}\left\{\exp\left[-\frac{(a(r_n)-(n+p))^2}{2b(r_n)}\right]+o(1)\right\}. \\ &= \frac{f(r_n)}{\sqrt{2\pi b(r_n)}}\left\{\exp\left[-\frac{p^2}{2b(r_n)}\right]+o(1)\right\}. \qquad \text{lorsque } n\to\infty. \end{aligned}$$

Comme $b(r_n)\to\infty$ par 2.2.1 (b) et que $\lim_{n\to\infty}\exp\left[-p^2/2b(r_n)\right]=1$, nous obtenons

$$a_{n+p}r_n^{n+p}\sim\frac{f(r_n)}{\sqrt{2\pi b(r_n)}}.$$

Le résultat suit en posant $p=0,1,-1$ dans la relation ci-dessus et en divisant. □

2.4 Croissance des fonctions H-admissibles

Dans cette section, nous allons utiliser le théorème principal de la section 2.3 ainsi que ses corollaires afin d'obtenir de l'information sur la croissance des fonctions H-admissibles.

Lemme 2.4.1 *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z|<R$. Alors nous avons lorsque r et re^h tendent vers R:*

(a) $a\left(re^h\right)\sim a(r)$ uniformément en r si $|h|\le K/a(r)$ pour une constante K fixe et positive;

(b) si $R<\infty$, alors $(R-r)a(r)\to\infty$.

Démonstration. Posons $\phi(x)=a(e^x)$. Par le corollaire 2.3.2, nous savons que $a(r)$ est positive et croissante sur $r_0<r<R$. Comme e^x est également positive et croissante, $\phi(x)$ sera croissante sur $x_0<x<x_R=\log R$. Encore par le même corollaire, il suit que $\phi(x)\to\infty$ lorsque $x\to x_R$. Par la définition 2.2.1 (a) et le corollaire 2.3.2 nous avons donc

$$\begin{aligned} \phi'(x) = e^x a'(e^x) &= b(e^x), \\ &= o\left[a(e^x)^2\right], \qquad \text{lorsque } x\to x_R, \\ &= o\left[\phi(x)^2\right], \qquad \text{lorsque } x\to x_R. \end{aligned}$$

D'où, si $x' < x''$ et $x', x'' \to x_R$,

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{\phi(x')} - \frac{1}{\phi(x'')} = \int_{x'}^{x''} \frac{\phi'(x)}{\phi(x)^2} dx = o(x'' - x').$$

En effet, par l'uniformité de la relation asymptotique en (a) nous avons

$$\lim_{x', x'' \to x_R} \frac{\int_{x'}^{x''} \left| \frac{\phi'(x)}{\phi(x)^2} \right| dx}{|x'' - x'|} = \lim_{x', x'' \to x_R} \frac{\int_{x'}^{x''} \left| \frac{o\left[\phi(x)^2\right]}{\phi(x)^2} \right| dx}{|x'' - x'|},$$
$$\leq \lim_{x', x'' \to x_R} \left\{ \sup_{x \in [x', x'']} \frac{o(1)|x'' - x'|}{|x'' - x'|} \right\} = 0.$$

En multipliant (I) par $\phi(x')$, nous obtenons

$$\text{(II)} \qquad \frac{\phi(x')}{\phi(x'')} = 1 - \phi(x') o(x'' - x').$$

De plus, si $|x'' - x'| \leq K/\phi(x')$ alors

$$|o(x'' - x')\phi(x')| \leq \left| o(x'' - x') \frac{K}{|x'' - x'|} \right| \to 0, \qquad \text{lorsque } x', x'' \to x_R.$$

D'où, dans ces conditions, $o(x'' - x')\phi(x') = o(1)$. Nous pouvons donc transformer (II) pour obtenir

$$\frac{\phi(x')}{\phi(x'')} = 1 + o(1),$$

ce qui revient à dire que $\phi(x'') \sim \phi(x')$. En posant $r = e^{x'}$ et $h = x'' - x'$, nous montrons (a).

Pour démontrer (b), supposons, afin d'obtenir une contradiction, que $R < \infty$ et que $(R - r)a(r)$ ne tend pas vers l'infini lorsque $r \to R$. Dans ce cas, il existera des constantes C et C' ainsi qu'une suite $R_n \to R$ telles que $(R_n - r)a(R_n)$ reste bornée et

$$\text{(III)} \qquad a(R_n) < \frac{C}{R - R_n} < \frac{C'}{\log(R/R_n)}.$$

La première inégalité de (III) étant triviale, vérifions que la seconde tient bel et bien. Posons $R' = \max(r_0, R/2) > 0$ (le même r_0 que dans le corollaire 2.3.2). Pour des

n assez grands, nous aurons $R_n > R'$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous garantit que

$$\begin{aligned}\log R - \log R_n &= \frac{1}{r}(R - R_n), \qquad \text{pour un } r \in [R', R].\\ &\leq \frac{1}{R'}(R - R_n).\end{aligned}$$

Donc en posant $C' = (C+1)/R'$, nous sommes assurés que

$$C(\log R - \log R_n) < C'(R - R_n),$$

ce qui démontre la seconde inégalité de (III).

Soit $r_n \to R$ une suite telle que $R_n < r_n < R$ pour tout n. Posons $h = \log(r_n/R_n)$. Alors par (III) nous avons

$$h = \log \frac{r_n}{R_n} < \log \frac{R}{R_n} < \frac{C'}{a(R_n)}.$$

En posant $r = R_n$, il suit que $re^h = r_n$ et $|h| < C'/a(r)$. Nous pouvons donc appliquer la partie (a) du présent lemme pour déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(R_n)}{a(r_n)} = 1,$$

d'où, à partir d'un N assez grand mais fixe, $a(R_n)/a(r_n) > 1/2$. Nous en déduisons que $a(r) < 2a(R_n) < \infty$ pour tout $r \in (R_n, R)$. Ceci contredit donc le fait que $\phi(r) = a(e^r) \to \infty$ car $a(e^r) < 2a(e^{R_n})$ pour tout $r \in (R_n, R)$. (b) est donc vrai. □

Comme nous aurons besoin à plusieurs reprises d'utiliser le fait que pour une fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ H-admissible, les a_n sont positifs pour tout n assez grand, démontrons le petit lemme suivant.

Lemme 2.4.2 *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$. Alors pour tous les n assez grands, les coefficients a_n de $f(z)$ sont strictement positifs.*

Démonstration. Comme $f(z)$ est H-admissible, il existe une constante r_0, où $0 < r_0 < R$, telle que $f(r) > 0$ pour tout $r \in (r_0, R)$. Soit N_0 le plus petit entier tel que $N_0 \geq a(r_0)$. Alors si $n \geq N_0$, nous aurons que $a(r_n) = n$ et en choisissant N_1 assez grand avec $N_1 > N_0$, le théorème principal nous assure que

$$a_n > \frac{1}{2} \frac{f(r_n)}{r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}} > 0, \qquad \text{pour } n \geq N_1,$$

d'où $a_n > 0$. □

Lemme 2.4.3 *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$. Alors si $n > 0$*

(a) $$\frac{f(r)}{r^n} \to \infty, \qquad \textit{lorsque } r \to R.$$

De plus, étant donné $\epsilon > 0$, nous avons

(b) $$a(r) = O[f(r)^\epsilon] \qquad \textit{et} \qquad b(r) = O[f(r)^\epsilon],$$

lorsque $r \to R$.

Démonstration. Par le lemme 2.4.2, nous savons que $a_k > 0$ pour k assez grand. Supposons que $a_k > 0$. Nous avons que

$$a_k r^k = \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left\{ \exp\left[\frac{-(a(r)-k)^2}{2b(r)}\right] + o(1) \right\}.$$

Par le corollaire 2.3.2, nous savons que $b(r) = o[a(r)^2]$ et donc que

$$\exp\left[\frac{-(a(r)-k)^2}{2b(r)}\right] = o(1), \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

D'où pour r suffisamment près de R, $f(r) > \frac{1}{2} a_k r^k \sqrt{2\pi b(r)}$. De ceci nous tirons

$$\lim_{r\to R} \frac{f(r)}{r^k} \geq \lim_{r \to R} \frac{1}{2} a_k \sqrt{2\pi b(r)} = \infty,$$

par 2.2.1 (b). La partie (a) du lemme est donc vérifiée.

Pour démontrer la partie (b), supposons maintenant qu'il existe r_1 tel que pour tout $r \in [r_1, R)$ nous avons

(I) $$a(r) = r\frac{f'(r)}{f(r)} \geq f(r)^\epsilon.$$

Alors,

$$\int_{r_1}^{\delta} \frac{f'(r)}{f(r)^{1+\epsilon}} dr \geq \int_{r_1}^{\delta} \frac{dr}{r} = \log\left(\frac{\delta}{r_1}\right), \qquad \text{pour } r_1 < \delta < R.$$

En intégrant le membre de gauche, nous obtenons

$$\frac{f(r_1)^{-\epsilon} - f(\delta)^{-\epsilon}}{\epsilon} \geq \log\left(\frac{\delta}{r_1}\right).$$

En prenant la limite lorsque $\delta \to R$, nous arrivons à une contradiction si R est infini. En effet, par 2.4.3 (a),

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to\infty} \frac{f(r_1)^{-\epsilon} - f(\delta)^{-\epsilon}}{\epsilon} &\geq \lim_{\delta\to\infty} \log\left(\frac{\delta}{r_1}\right). \\ \frac{f(r_1)^{-\epsilon}}{\epsilon} &\geq \infty.\end{aligned}$$

Supposons donc que $R < \infty$. Dans ce cas, prendre la limite nous donne

$$\frac{f(r_1)^{-\epsilon}}{\epsilon} \geq \log\left(\frac{R}{r_1}\right).$$

De cela nous déduisons que

$$\text{(II)} \qquad f(r_1) \leq \left\{\epsilon \log\left(\frac{R}{r_1}\right)\right\}^{-\frac{1}{\epsilon}} < \frac{C}{(R-r_1)^{\frac{1}{\epsilon}}},$$

où C est une constante positive. Vérifions la deuxième inégalité de (II). En posant le changement de variables $y = r_1/R$ où $y \in [r_1/R, 1)$ lorsque $r_1 \to R$, cette inégalité devient

$$\log(y) \leq \frac{R}{C'}(y-1),$$

laquelle est vérifiée pour $C' > R$. Notons que r_1 peut être aussi près de R qu'il nous plaît. Par (b) du lemme 2.4.1, comme $R < \infty$, nous aurons qu'à partir d'un $r_2 < R$,

$$a(r) > \frac{2r}{\epsilon(R-r)}, \qquad \text{pour } r_2 < r < R.$$

D'où, en combinant cela avec (I),

$$\frac{f'(r)}{f(r)} > \frac{2}{\epsilon(R-r)}, \qquad \text{pour } r_2 < r < R.$$

En intégrant de r_2 à r_1, nous obtenons

$$\log\left(\frac{f(r_1)}{f(r_2)}\right) > \frac{2}{\epsilon}\log\left(\frac{R-r_2}{R-r_1}\right), \qquad \text{où } r_2 < r_1 < R,$$

ce qui est équivalent à

$$\log f(r_1) > \log f(r_2) + \frac{2}{\epsilon}\left(\log(R-r_2) - \log(R-r_1)\right)$$

et contredit (II) si r_1 est assez près de R. L'inégalité (I) est donc fausse pour des r arbitrairement près de R.

Supposons maintenant que r_1 est assez près de R pour que l'on ait à la fois

$$\text{(III)} \qquad b(r) < \epsilon a(r)^2, \qquad \text{pour } r_1 \leq r < R.$$

et

$$\text{(IV)} \qquad a(r_1) < f(r_1)^\epsilon.$$

Notons que (III) est vrai par le corollaire 2.3.2. Alors,

$$\text{(V)} \qquad a(r) < f(r)^\epsilon, \qquad \text{pour } r_1 \leq r < R,$$

ce qui revient à dire que $a(r) = O[f(r)^\epsilon]$. En effet, supposons que (V) est faux. Dans ce cas, par (IV) et le fait que $a(r)$ et $f(r)^\epsilon$ sont des fonctions continues, il existera un plus petit nombre r_2 tel que

$$a(r_2) = f(r_2)^\epsilon, \qquad \text{où } r_1 < r_2 < R.$$

Sous ces hypothèses, nous avons que

$$a(r) - f(r)^\epsilon < 0, \qquad \text{si } r_1 < r < r_2,$$

et

$$a(r) - f(r)^\epsilon = 0, \qquad \text{si } r = r_2.$$

Par la continuité des dérivées de $a(r)$ et $f(r)^\epsilon$, il suit que $\frac{d}{dr}(a(r) - f(r)^\epsilon) \geq 0$ en r_2. Analysons maintenant l'expression $r\frac{d}{dr}(a(r) - f(r)^\epsilon)$. Par définition de $a(r)$ et $b(r)$, nous avons

$$\begin{aligned} r\frac{d}{dr}(a(r) - f(r)^\epsilon) &= ra'(r) - \epsilon r f(r)^\epsilon \frac{f'(r)}{f(r)}, \\ &= b(r) - \epsilon a(r) f(r)^\epsilon, \\ &\geq 0, \qquad \text{lorsque } r = r_2. \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu l'inégalité

$$b(r_2) \geq \epsilon a(r_2) f(r_2)^\epsilon = \epsilon a(r_2)^2,$$

ce qui contredit (III). L'inégalité (V) est donc vraie, d'où $a(r) = O\left[f(r)^{\epsilon}\right]$. De cela et du corollaire 2.3.2, nous montrons aisément que $b(r) = O[f(r)^{\epsilon}]$ et le lemme est démontré. □

Lemme 2.4.4 *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$. Alors pour tout k réel fixe,*

$$f\left(r + \frac{kr}{a(r)}\right) \sim e^k f(r), \qquad \textit{lorsque } r \to R.$$

Démonstration. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $\log f(r)$, il existe un $\theta \in (0, 1)$ tel que pour $0 < r < R$ et $0 < r + h < R$,

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \log f(r+h) - \log f(r) &= h\frac{f'(r+\theta h)}{f(r+\theta h)}, \qquad \text{où } 0 < \theta < 1, \\ &= \frac{h}{r+\theta h}a(r+\theta h). \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $h = kr/a(r)$, le corollaire 2.3.2 nous assure que

$$\frac{r+\theta h}{r} = \left[1 + \frac{O(1)}{a(r)}\right] = (1 + o(1)),$$

d'où $(r + \theta h) \sim r$. Vérifions que $a(r + \theta h) \sim a(r)$. Comme $r + \theta h = r\,(1 + \theta k/a(r))$, posons $e^l = 1 + \theta k/a(r)$. Par le corollaire 2.3.2, $e^l \to 1$ lorsque $r \to R$ et donc, à partir de R_1 assez grand, $1 < e^l < 2$. Nous avons donc

$$l = \log\left(1 + \frac{\theta k}{a(r)}\right) \leq \frac{\theta k}{a(r)} < \frac{k}{a(r)} \qquad \text{pour } r > R_1,$$

par le théorème de Leibniz sur les séries alternées appliqué au développement en série de $\log\,(1 + \theta k/a(r))$. Il suit que l vérifie l'hypothèse du lemme 2.4.1 (a) et $a(r+\theta h) \sim a(r)$. Maintenant, appliquons l'exponentielle de chaque côté de (I) et laissons tendre $r \to R$.

$$\lim_{r\to R}\frac{f(r+h)}{f(r)} = \lim_{r\to R}\exp\left[\frac{h}{r+\theta h}a(r+\theta h)\right].$$

En substituant h,

$$\lim_{r\to R}\frac{f\left(r + \dfrac{kr}{a(r)}\right)}{f(r)} = e^k,$$

c'est-à-dire,

$$f\left(r + \frac{kr}{a(r)}\right) \sim e^k f(r), \qquad \text{lorsque } r \to R. \quad \square$$

2.5 Autres résultats importants

Cette section regroupe trois théorèmes ainsi que trois lemmes qui serviront plus tard à démontrer les propriétés de fermeture des fonctions H-admissibles énoncées au début de ce chapitre.

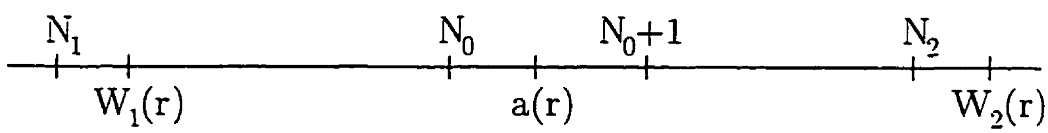
Théorème 2.5.1 *Supposons que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est H-admissible sur $|z| < R$. Alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ fixe, nous aurons lorsque $r \to R$*

$$\sum_{n \leq W(r)} a_n r^n \sim \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-t^2} dt, \qquad \text{où } W(r) = a(r) + \omega\sqrt{2b(r)}.$$

Démonstration. Soient ω_1, ω_2 fixes tels que $\omega_1 < 0 < \omega_2$. Définissons soigneusement les trois entiers suivants en fonction de r. N_0 sera l'entier tel que $N_0 \leq a(r) < N_0 + 1$. Comme dans l'énoncé du théorème, nous allons simplifier la notation en posant $W_1(r) = a(r) + \omega_1\sqrt{2b(r)}$ et $W_2(r) = a(r) + \omega_2\sqrt{2b(r)}$. Soient également N_1 et N_2 les plus grands entiers tels que

$$N_1 \leq W_1(r) \quad \text{et} \quad N_2 \leq W_2(r).$$

Pour aider à la compréhension de la démonstration, voici une représentation graphique des diverses grandeurs en jeu.



Pour chaque entier n, nous avons l'inégalité

$$\int_{n}^{n+1} \exp\left[\frac{-(x-a(r))^2}{2b(r)}\right] dx \leq \exp\left[\frac{-(n-a(r))^2}{2b(r)}\right] \leq \int_{n-1}^{n} \exp\left[\frac{-(x-a(r))^2}{2b(r)}\right] dx.$$

En sommant de $n = N_0 + 2$ à $n = N_2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_G = \int_{N_0+2}^{N_2+1} \exp\left[\frac{-(x-a(r))^2}{2b(r)}\right] dx &\leq \sum_{n=N_0+2}^{N_2} \exp\left[\frac{-(n-a(r))^2}{2b(r)}\right], \\ &\leq \int_{N_0+1}^{N_2} \exp\left[\frac{-(x-a(r))^2}{2b(r)}\right] dx = I_D. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $x = a(r) + t\sqrt{2b(r)}$, les intégrales I_G et I_D deviennent

$$I_G = \sqrt{2b(r)} \int_{l_1}^{l_2} e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad I_D = \sqrt{2b(r)} \int_{l_3}^{l_4} e^{-t^2} dt.$$

Vérifions que $l_1, l_3 \to 0$ et que $l_2, l_4 \to \omega_2$ lorsque $r \to R$.

Pour l_1,

$$0 \leq \frac{(N_0+1) - a(r)}{\sqrt{2b(r)}} \leq l_1 = \frac{(N_0+2) - a(r)}{\sqrt{2b(r)}} \leq \frac{2}{\sqrt{2b(r)}}.$$

Par le choix de N_0 qui, ne l'oublions pas, dépend de r, le résultat suit en laissant tendre r vers l'infini.

Pour l_2,

$$\frac{\omega_2\sqrt{2b(r)}}{\sqrt{2b(r)}} \leq l_2 = \frac{(N_2+1) - a(r)}{\sqrt{2b(r)}} \leq \frac{\omega_2\sqrt{2b(r)}+1}{\sqrt{2b(r)}}.$$

Ici aussi, ces inégalités tiennent grâce au choix de N_2 et le résultat suit en laissant tendre r vers l'infini. Il est évident que le même raisonnement s'applique à l_3 et l_4.

De cela, il suit que

$$\text{(I)} \quad \sum_{n=N_0+2}^{N_2} \exp\left[\frac{-(n-a(r))^2}{2b(r)}\right] \sim \sqrt{2b(r)} \int_0^{\omega_2} e^{-t^2} dt, \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

Par le même argument appliqué aux n tels que $N_1 + 1 \leq n \leq N_0 - 1$, nous avons également

$$\text{(II)} \quad \sum_{n=N_1+1}^{N_0} \exp\left[\frac{-(n-a(r))^2}{2b(r)}\right] \sim \sqrt{2b(r)} \int_{\omega_1}^{0} e^{-t^2} dt, \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

Comme nous aurons besoin du fait que $N_2 - N_1 = O\left[\sqrt{b(r)}\right]$, vérifions-le. Nous avons que

$$(W_2(r) - 1) - W_1(r) \leq N_2 - N_1 \leq W_2(r) - (W_1(r) - 1),$$

par le choix de N_1 et N_2. D'où, si r est assez près de R,

$$0 < (\omega_2 - \omega_1)\sqrt{2b(r)} - 1 \leq N_2 - N_1 \leq (\omega_2 - \omega_1)\sqrt{2b(r)} + 1.$$

Alors par 2.2.1 (b),

$$0 < \frac{N_2 - N_1 + 1}{\sqrt{2b(r)}} \leq (\omega_2 - \omega_1) + \frac{2}{\sqrt{2b(r)}} \to \omega_2 - \omega_1, \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

il suit que

$$\textbf{(III)} \qquad N_2 - N_1 = O\left[\sqrt{b(r)}\right].$$

Par le théorème principal appliqué à $\sum_{n=N_1+1}^{N_0} a_n r^n$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N_1+1}^{N_0} a_n r^n &= \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \sum_{n=N_1+1}^{N_0} \left\{ \exp\left[\frac{-(n-a(r))^2}{2b(r)}\right] + o(1) \right\}, \\
&= \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \sum_{n=N_1+1}^{N_0} \left\{ \exp\left[\frac{-(n-a(r))^2}{2b(r)}\right] \right\} + \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \frac{(N_0 - (N_1+1))o(1)}{\sqrt{2b(r)}}.
\end{aligned}$$

car le $o(1)$ du théorème principal est uniforme en n et ne dépend que de r. Par (II) et (III) nous avons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N_1+1}^{N_0} a_n r^n &= \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left(\sqrt{2b(r)} \left\{ \int_{\omega_1}^{0} e^{-t^2} dt \right\} + o(1) \right) + \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} o(1). \\
\textbf{(IV)} \qquad &= \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\omega_1}^{0} e^{-t^2} dt + o(1) \right\}.
\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons,

$$\textbf{(V)} \qquad \sum_{n=N_0+1}^{N_2} a_n r^n = \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{0}^{\omega_2} e^{-t^2} dt + o(1) \right\}.$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$. Choisissons $\omega_2 = -\omega_1$ assez grands pour que

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-t^2} dt > \sqrt{\pi}(1-\epsilon).$$

En combinant (IV) et (V) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N_1+1}^{N_2} a_n r^n &= \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-t^2} dt + o(1) \right\}, \\
&> \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\pi}(1-\epsilon) \right), \qquad \text{si } r \text{ est assez grand}, \\
&= f(r)(1-\epsilon).
\end{aligned}$$

Comme $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$, nous avons que

$$\sum_{n=0}^{N_1} a_n r^n + \sum_{N_2+1}^{\infty} a_n r^n < \epsilon f(r).$$

Par le lemme 2.4.2, les a_k sont tous positifs pour des k assez grands, disons $k \geq p$. Nous aurons donc, grâce au lemme 2.4.3 (a), lorsque $r \to R$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{n=0}^{k} |a_n| r^n - \sum_{n=0}^{k} a_n r^n &= \sum_{n=0}^{p} (|a_n| - a_n) r^n. \\ &= o(f(r)). \end{aligned}$$

D'où, pour r suffisamment près de R,

$$\textbf{(VI)} \qquad \left| \sum_{n=0}^{N_1} a_n r^n \right| \leq \sum_{n=0}^{N_1} |a_n| r^n < 2\epsilon f(r).$$

Par (II), il suit que

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n=0}^{N_0} a_n r^n - \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt \right| \leq \\ &\quad \left| \sum_{n=0}^{N_1} a_n r^n + \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega_1} e^{-t^2} dt + \sum_{n=N_1+1}^{N_0} a_n r^n - \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{\omega_1}^{0} e^{-t^2} dt \right| \leq \\ &\quad \left| \sum_{n=0}^{N_1} a_n r^n \right| + \left| \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega_1} e^{-t^2} dt \right| + \left| \sum_{n=N_1+1}^{N_0} a_n r^n - \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{\omega_1}^{0} e^{-t^2} dt \right| \leq \\ &\quad 2\epsilon f(r) \quad + \quad \epsilon f(r) \quad + \quad \epsilon f(r) \quad \leq 4\epsilon f(r), \end{aligned}$$

où les estimations en "$\epsilon f(r)$" sont respectivement justifiées par (VI), le choix de ω_1 et ω_2 et (IV). Et comme

$$\lim_{r \to R} \left| \frac{\sum_{n=0}^{N_0} a_n r^n}{\frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt} - 1 \right| \leq \lim_{r \to R} \frac{4\epsilon f(r)}{\frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt} = 4\epsilon$$

et que ϵ a été choisi quelconque, (VI) nous permet de déduire que

$$\text{(VII)} \qquad \sum_{n=0}^{N_0} a_n r^n \sim \sum_{n=0}^{N_0} |a_n| r^n \sim \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt,$$

ce qui prouve le théorème dans le cas où $\omega = 0$. Si $\omega \neq 0$, posons $\omega = \omega_1$ ou ω_2 suivant le signe de ω et $W(r) = a(r) + \omega\sqrt{2b(r)}$. Supposons que $\omega > 0$. Par (VII) et (V), nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq W(r)} a_n r^n &= \sum_{n=0}^{N_0} a_n r^n + \sum_{n=N_0+1}^{N_2} a_n r^n. \\
&= \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt + o(1) \right\} + \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{0}^{\omega} e^{-t^2} dt + o(1) \right\}. \\
&\sim \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-t^2} dt,
\end{aligned}$$

Si $\omega < 0$, par (IV) et (VII), nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq W(r)} a_n r^n &= \sum_{n=0}^{N_0} a_n r^n - \sum_{n=N_1+1}^{N_0} a_n r^n, \\
&= \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt + o(1) \right\} - \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\omega}^{0} e^{-t^2} dt + o(1) \right\}. \\
&\sim \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-t^2} dt.
\end{aligned}$$

Le lemme 2.4.2 nous permet également de conclure que

$$\sum_{n \leq W(r)} |a_n| r^n \sim \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-t^2} dt.$$

ce qui termine la démonstration du théorème. □

Le prochain théorème nous fournira une relation asymptotique entre $f(r)$ et ses dérivées.

Théorème 2.5.2 *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$. Alors pour tout entier positif k fixe, nous aurons*

$$f^{(k)}(r) \sim f(r) \left(\frac{a(r)}{r} \right)^k, \qquad \textit{lorsque } r \to R.$$

Démonstration. Posons $r_1 = r[1 + 1/a(r)]$. Notons que, par le corollaire 2.3.2, $a(r) \to \infty$ et donc $r_1 \to R$ lorsque $r \to R$. Alors, pour $|z| < r_1$, les lemmes 2.4.2, 2.4.3 et 2.4.4 nous donneront

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right|, \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_1^n, \\ &= O(f(r_1)), \qquad \text{pour } r_1 \text{ assez grand}, \\ &= O(f(r)), \qquad \text{lorsque } r \to R, \end{aligned}$$

d'où, en posant $h = r_1 - r$, la formule de Cauchy pour les dérivées et le lemme 2.4.4 nous donnent

$$\textbf{(I)} \qquad \begin{aligned} \left|f^{(k)}(r)\right| &= \left|\frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-r|=h} \frac{f(z)}{(z-r)^{k+1}} dz\right|, \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{2\pi h}{h^{k+1}} \max_{|z-r|\leq h} |f(z)|, \\ &= \frac{k!}{h^k} \max_{|z-r|\leq h} |f(z)|, \\ &= O\left[f(r)\left(\frac{a(r)}{r}\right)^k\right]. \end{aligned}$$

Raffinons (I) afin d'obtenir une relation asymptotique. Pour cela, écrivons $r^k f^{(k)}(r)$ comme

$$\begin{aligned} r^k f^{(k)}(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n r^n, \\ &= \sum\nolimits_1 \; + \; \sum\nolimits_2, \end{aligned}$$

où, pour ω une constante positive, nous posons

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &= \sum_{|a(r)-n|\leq \omega\sqrt{2b(r)}} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^n, \\ \sum\nolimits_2 &= \sum_{|a(r)-n|> \omega\sqrt{2b(r)}} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^n. \end{aligned}$$

Par le corollaire 2.3.2, nous avons pour $\sum_1$,

$$\left|1 - \frac{n}{a(r)}\right| \leq \omega \frac{\sqrt{2b(r)}}{a(r)} \to 0, \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

D'où $a(r) \sim n$ et il suit que

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) \sim n^k \sim a(r)^k.$$

De cela et du théorème 2.5.1, nous obtenons pour $\sum_1$,

$$\textbf{(II)} \qquad \sum\nolimits_1 \sim a(r)^k \sum_{|a(r)-n| \leq \omega\sqrt{2b(r)}} a_n r^n \sim \frac{f(r)a(r)^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-t^2} dt.$$

Plus de travail sera nécessaire afin de majorer $\sum_2$ adéquatement. Définissons $\sum'$ comme l'opérateur de sommation restreint aux n tels que $|n - a(r)| > \omega\sqrt{2b(r)}$. Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} \textbf{(III)} \qquad \left|\sum\nolimits_2\right| \leq \sum\nolimits' n^k |a_n| r^n &\leq \left(\sum\nolimits' |a_n| r^n\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\nolimits' n^{2k} |a_n| r^n\right)^{\frac{1}{2}}, \\ &< \left(\sum\nolimits' |a_n| r^n\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum n^{2k} |a_n| r^n\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Étudions la première sommation du membre d'extrême droite de (III) sans ses valeurs absolues.

$$\begin{aligned} \sum\nolimits' a_n r^n &= \sum_{n < a(r) - \omega\sqrt{2b(r)}} a_n r^n + \sum_{n > a(r) + \omega\sqrt{2b(r)}} a_n r^n, \\ &\sim \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\omega} e^{-t^2} dt + \left(f(r) - \sum_{n \leq a(r) + \omega\sqrt{2b(r)}} a_n r^n \right), \\ &\sim \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\omega} e^{-t^2} dt + \frac{f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2} dt. \\ &= \frac{2f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.4.2, nous pouvons conclure que

$$\sum\nolimits' |a_n| r^n \sim \frac{2f(r)}{\sqrt{\pi}} \int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Considérons maintenant la seconde sommation de (III). Par le lemme 2.4.2 les a_n sont finalement tous positifs. Posons N égal à l'indice maximum des $a_n < 0$. Comme k est fixé, nous sommes assurés, encore par le lemme 2.4.2, que pour une constante C assez grande, (I) et le lemme 2.4.3 nous donnent

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}|a_n|r^n &\leq Cr^{2k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-2k+1)a_n r^{n-2k} + O\left[r^N\right]\right). \\
&\leq Cr^{2k}\left(O\left[f(r)\left(\frac{a(r)}{r}\right)^{2k}\right] + O\left[r^N\right]\right), \\
&= O\left[f(r)a(r)^{2k}\right].
\end{aligned}$$

En reportant les informations ainsi obtenues à propos de $\sum_2$ dans (III), nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\sum\nolimits_2\right| &< \left(\frac{2f(r)}{\sqrt{\pi}}\int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2}dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(O\left[f(r)a(r)^{2k}\right]\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&= O\left[f(r)a(r)^k\right]\int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2}dt.
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$. Par (II), nous avons

$$\sum\nolimits_1 - f(r)a(r)^k \sim \frac{f(r)a(r)^k}{\sqrt{\pi}}\int_{\omega}^{\infty} e^{-t^2}dt > 0.$$

Nous pouvons donc choisir ω assez grand pour qu'à la fois

$$\left|\sum\nolimits_1 - f(r)a(r)^k\right| < \epsilon f(r)a(r)^k \quad \text{et} \quad \left|\sum\nolimits_2\right| < \epsilon f(r)a(r)^k.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left|\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 - f(r)a(r)^k\right| &\leq \left|\sum\nolimits_1 - f(r)a(r)^k\right| + \left|\sum\nolimits_2\right|. \\
&\leq \epsilon f(r)a(r)^k + \epsilon f(r)a(r)^k = 2\epsilon f(r)a(r)^k.
\end{aligned}$$

ce qui implique le résultat. □

Le lemme suivant nous permettra d'approximer $f(z)$ au voisinage de $z = r$.

Lemme 2.5.3 *Supposons que $f(z)$ est holomorphe et non nulle à l'intérieur du disque $|z-r| < 2\eta r$, où $0 < \eta \leq 1/2$, et que*

$$|b(z)| < Cb(r), \qquad \textit{sur } |z-r| < 2\eta r,$$

où $C > 0$ et $a(z), b(z)$ sont définis en 2.2.1. Alors nous avons

$$\log f\left(re^{i\theta}\right) = \log f(r) + i\theta a(r) - \frac{\theta^2}{2}b(r) + \epsilon(r,\theta),$$

où

$$|\epsilon(r,\theta)| < \frac{Cb(r)|\theta|^3}{2\eta}, \qquad \textit{pour } |\theta| \leq \eta.$$

Démonstration. Posons $\zeta = \log z$, $\epsilon_0 = \log r$ et $\phi(\zeta) = \log f(e^\zeta)$. Vérifions que la fonction $\phi(\zeta)$ est bien holomorphe sur $|\zeta - \epsilon_0| \leq \eta$. Pour cela, il suffit de nous assurer que $f(z) = f(e^\zeta)$ ne s'annule pour aucun ζ avec $|\zeta - \epsilon_0| < \eta$. Par la définition de ϵ_0 et en maximisant $|\zeta - \epsilon_0|$, nous avons

$$\begin{aligned}
|e^\zeta - r| &= r\left|\frac{e^\zeta}{r} - 1\right|, \\
&= r\left|e^{(\zeta-\epsilon_0)} - 1\right|, \\
&\leq r\left(e^{|\zeta-\epsilon_0|} - 1\right), \\
&\leq r\left(e^\eta - 1\right), \\
&< 2\eta r,
\end{aligned}$$

car $e^\eta - 1 < 2\eta$ sur $0 < \eta \leq 1/2$. D'où, il suit de nos hypothèses de départ que $f(e^\zeta) \neq 0$ pour tout ζ avec $|\zeta - \epsilon_0| < \eta$ et $\phi(\zeta)$ est holomorphe sur ce disque. Nous trouvons, après de simples calculs, que

$$\phi''(\zeta) = e^\zeta \frac{f'(e^\zeta)}{f(e^\zeta)} + e^{2\zeta}\frac{f''(e^\zeta)}{f(e^\zeta)} - e^{2\zeta}\left(\frac{f'(e^\zeta)}{f(e^\zeta)}\right)^2,$$

est bien définie, et par 2.2.1, $\phi''(\zeta) = b(e^\zeta)$. Aussi, par 2.2.1 (b), $\phi''(\epsilon_0) = b(r) > 0$ pour un r assez grand. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$|\phi''(\zeta)| < C\phi''(\epsilon_0), \qquad \text{sur } |\zeta - \epsilon_0| \leq \eta.$$

Nous pouvons donc développer $\phi''(\zeta)$ en série autour de ϵ_0 pour obtenir

$$\text{(I)} \qquad \phi''(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta - \epsilon_0)^n, \qquad \text{sur } |\zeta - \epsilon_0| < \eta,$$

où, par l'inégalité de Cauchy,

$$|c_n| \leq \frac{C\phi''(\epsilon_0)}{\eta^n} = \frac{Cb(r)}{\eta^n}.$$

En intégrant (I) deux fois par rapport à ζ, nous obtenons

$$\textbf{(II)} \qquad \phi(\zeta) = \phi(\epsilon_0) + (\zeta - \epsilon_0)\phi'(\epsilon_0) + \frac{1}{2}(\zeta - \epsilon_0)^2\phi''(\epsilon_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)}(\zeta - \epsilon_0)^{n+2}.$$

Considérons la série apparaissant dans le membre de gauche de (II). Pour $|\zeta - \epsilon_0| \leq \eta$ et $n \geq 1$, nous avons

$$\textbf{(III)} \qquad |c_n||\zeta - \epsilon_0|^{n+2} \leq \frac{Cb(r)|\zeta - \epsilon_0|^{n+2}}{\eta^n} \leq \frac{Cb(r)|\zeta - \epsilon_0|^3}{\eta}.$$

Posons maintenant $\zeta - \epsilon_0 = i\theta$ avec $|\theta| \leq \eta$ et remarquons que

$$\phi'(\epsilon_0) = e^{\epsilon_0}\frac{f'(e^{\epsilon_0})}{f(e^{\epsilon_0})} = r\frac{f'(r)}{f(r)} = a(r),$$

et

$$\phi''(\epsilon_0) = b(r).$$

Comme $re^{i\theta} = re^{\zeta - \epsilon_0} = e^{\zeta}$, en substituant les valeurs de e^{ζ}, $\phi(\epsilon_0)$, $\phi'(\epsilon_0)$ et $\phi''(\epsilon_0)$ dans (II), il suit que

$$\log f\left(re^{i\theta}\right) = \log f(r) + i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r) + \epsilon(r,\theta),$$

où par (III),

$$\begin{aligned}
|\epsilon(r,\theta)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)}(\zeta - \epsilon_0)^{n+2}\right|. \\
&\leq \left|\frac{Cb(r)|\zeta - \epsilon_0|^3}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right|. \\
&< \frac{Cb(r)|\theta|^3}{2\eta},
\end{aligned}$$

car $|\theta| = |\zeta - \epsilon_0| \leq \eta$, ce qui prouve le lemme. □

Le résultat suivant nous permettra d'approximer $f\left(re^{i\theta}\right)$ pour de "petites" valeurs de θ encore plus précisément que ne le laissait croire 2.2.1 (c).

Lemme 2.5.4 *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$. Alors nous aurons lorsque $r \to R$, uniformément pour $|\theta| < a(r)^{-1}$,*

$$f\left(re^{i\theta}\right) = f(r) + i\theta r f'(r) - \frac{1}{2}\theta^2 \left[rf'(r) + r^2 f''(r)\right] + O\left[\theta^3 f(r)a(r)^3\right].$$

Démonstration. Appliquons le lemme 2.5.3 à la fonction $F(z) = e^{f(z)}$ et écrivons

$$A(z) = z\frac{F'(z)}{F(z)} = zf'(z) \quad \text{et} \quad B(z) = zA'(z) = zf'(z) + z^2 f''(z).$$

Comme $f(z)$ est H-admissible, nous pouvons appliquer le théorème 2.5.2, le lemme 2.2.2 ainsi que le corollaire 2.3.2 à $B(z)$ pour obtenir, lorsque $r \to R$,

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} B(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n, \\ &= rf'(r) + r^2 f''(r), \\ &\sim rf(r)\left(\frac{a(r)}{r}\right) + r^2 f(r)\left(\frac{a(r)}{r}\right)^2, \\ &= f(r)a(r) + f(r)a(r)^2, \\ &\sim f(r)a(r)^2. \end{aligned}$$

Comme $b_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, le lemme 2.4.2 nous assure que $B(r)$ ne possède qu'un nombre fini de coefficients $b_n < 0$. En posant $\eta = a(r)^{-1}$, $f(z)$ sera holomorphe sur $|\zeta - r| \leq 2\eta r$ et nous pourrons développer $B(z)$ en série autour du point $z = r$ pour obtenir

$$B(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b'_k(\zeta - r)^k, \qquad \text{sur } |\zeta - r| \leq 2\eta r,$$

où $b'_k = \sum_{n=k}^{\infty} b_n r^{n-k}$. Il suit que pour tout k assez grand, $b'_k > 0$. Soit N le maximum des indices tels que $b'_n < 0$. Nous aurons donc

$$\begin{aligned} |B(\zeta)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |b'_n||\zeta - r|^n, \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |b'_n|(2\eta r)^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b'_n(2\eta r)^n + 2\sum_{a_n < 0}(-b'_n)(2\eta r)^n, \\ &= B(r + 2\eta r) + O\left[r^N\right]. \end{aligned}$$

Aussi, par (I), le lemme 2.4.4 et le fait que $\eta \to 0$,

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} B(r+2\eta r) &\sim f(r+2\eta r)a(r+2\eta r)^2, \\ &\sim e^2 f(r)a(r(1+2\eta))^2, \\ &\sim e^2 f(r)a(r)^2, \qquad \text{lorsque } r \to R. \end{aligned}$$

Maintenant, comme $F(z) = e^{f(z)}$ est une fonction holomorphe et non nulle sur le disque $|z-r| < 2\eta r$ avec $\eta = a(r)^{-1}$; (II), le lemme 2.4.3 et (I) nous donnent

$$\begin{aligned} |B(\zeta)| &\leq B(r+2\eta r) + O\left[r^{-N}\right], \\ &\sim e^2 f(r)a(r)^2 + O\left[r^{-N}\right], \\ &\sim e^2 f(r)a(r)^2, \\ &\sim e^2 B(r). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer le lemme 2.5.3 aux fonctions $F(z)$, $A(z)$ et $B(z)$ en posant $C = 9 > e^2$, ce qui nous donne

$$f\left(re^{i\theta}\right) = f(r) + i\theta A(r) - \frac{1}{2}\theta^2 B(r) + \epsilon(r,\theta),$$

où d'après (I) et la définition de η, pour r assez près de R,

$$\begin{aligned} |\epsilon(r,\theta)| &< \frac{9B(r)|\theta|^3}{2\eta}, \\ &< 5f(r)a(r)^3|\theta|^3, \\ &= O\left[\theta^3 f(r)a(r)^3\right]. \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. □

Le prochain résultat nous permettra de démontrer un théorème à propos du module de $f\left(re^{i\theta}\right)$.

Lemme 2.5.5 *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$. Alors il existe $r_1 < R$ tel que pour $r_1 < r < R$ et $f(r)^{-2/5} < |\theta| \leq \pi$ nous avons*

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| < f(r) - f(r)^{\frac{1}{7}}.$$

Démonstration. Écrivons

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

et choisissons k tel que $k \leq a(r) < k+1$. De plus, posons

$$\alpha = a_k r^k \quad \text{et} \quad \beta = a_{k+1} r^{k+1}.$$

Sans perte de généralité, le lemme 2.4.2 nous assure que α et β sont tous deux positifs pour r assez grand. Alors, par le théorème principal 2.3.1, nous avons que

$$\textbf{(I)} \qquad \alpha \sim \beta \sim \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}}, \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

En posant $z = re^{i\theta}$ et $0 < |\theta| \leq \pi$, la loi du cosinus nous donne

$$\textbf{(II)} \qquad \begin{aligned} \left|a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}\right|^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta, \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right). \\ &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ &\leq (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\frac{\theta^2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\left((\alpha+\beta)^2 - \left|a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}\right|^2\right) \geq 4\alpha\beta\frac{\theta^2}{\pi^2}.$$

En factorisant et en divisant nous obtenons

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta) - \left|a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}\right| &\geq \frac{4\alpha\beta\theta^2}{\pi^2\left((\alpha+\beta) + |a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}|\right)}, \\ &\geq \frac{2\alpha\beta\theta^2}{\pi^2(\alpha+\beta)}, \end{aligned}$$

car de (II), il suit que $\left|a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}\right| \leq \alpha + \beta$. Nous avons donc

$$\left|a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1}\right| \leq \alpha + \beta - \frac{2\alpha\beta\theta^2}{\pi^2(\alpha+\beta)}.$$

Si r est assez près de R et que nous nous restreignons aux θ tels que $f(r)^{-2/5} \leq |\theta| \leq \pi$, en utilisant (I) et en minorant θ, nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{2\alpha\beta\theta^2}{\pi^2(\alpha+\beta)} &\geq 2\,\frac{f(r)^2}{2\pi b(r)}\,\frac{\sqrt{2\pi b(r)}}{\pi^2 2f(r)}\,f(r)^{-\frac{4}{5}}, \\
&= \frac{f(r)^{\frac{1}{5}}}{\pi^2\sqrt{2\pi b(r)}}, \\
&\geq \frac{f(r)^{\frac{1}{5}}}{10\sqrt{2\pi b(r)}}.
\end{aligned}$$

Par le lemme 2.4.3, en posant $\epsilon = 1/15$ et pour des r suffisamment près de R, nous aurons $b(r) \leq Mf(r)^{1/15}$, où l'on peut choisir $M > 1$. Il suit que

$$\begin{aligned}
\frac{f(r)^{\frac{1}{5}}}{10\sqrt{2\pi b(r)}} &\geq \frac{f(r)^{\frac{1}{5}}}{10\sqrt{2\pi Mf(r)^{\frac{1}{15}}}}, \\
&= \frac{f(r)^{\frac{1}{6}}}{10\sqrt{2\pi M}} \geq f(r)^{\frac{1}{6}}.
\end{aligned}$$

Donc $\left|a_k z^k + a_{k+1}z^{k+1}\right| \leq \alpha + \beta - f(r)^{1/6}$ pour $f(r)^{-2/5} \leq |\theta| \leq \pi$. Comme $f(r) \to \infty$ lorsque $r \to R$, par les lemmes 2.4.2 et 2.4.3, si r est assez grand, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| &\leq \sum_{n=0}^{k-1} |a_n||re^{i\theta}|^n + \left|a_k z^k + a_{k+1}z^{k+1}\right| + \sum_{n=k+2}^{\infty} |a_n||re^{i\theta}|^n. \\
&\leq \sum_{n=0}^{k-1} |a_n|r^n + \alpha + \beta - f(r)^{\frac{1}{6}} + \sum_{n=k+2}^{\infty} |a_n|r^n, \\
&= f(r) - f(r)^{\frac{1}{6}} + \sum_{\substack{a_n<0 \\ n\neq k,k+1}} -2a_n r^n, \\
&\leq f(r) + O(r^N) - f(r)^{\frac{1}{6}}, \\
&\leq f(r) - f(r)^{\frac{1}{7}},
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

Nous terminerons cette section en démontrant le théorème suivant à propos du maximum de $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$.

Théorème 2.5.6 *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$. Alors il existe $r_0 < R$ tel que pour tout $r \in (r_0, R)$ et $0 < |\theta| \leq \pi$ nous avons*

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| < f(r).$$

Démonstration. Restreignons-nous aux θ tels que $0 < |\theta| < f(r)^{-2/5}$. Par le lemme 2.4.3 utilisé avec $\epsilon = 1/15$, il suit que pour des r assez près de R,

$$\frac{a(r)}{f(r)^{\frac{1}{5}}} \leq M, \qquad \text{pour } M \text{ une constante positive.}$$

En divisant de chaque côté par $f(r)^{1/5}$ et en prenant la limite lorsque r tend vers l'infini, nous trouvons que $a(r) = o\left[f(r)^{2/5}\right]$, ce qui revient à dire que $f(r)^{-2/5} = o\left[a(r)^{-1}\right]$. D'où $|\theta| = o\left[a(r)^{-1}\right]$ et nous sommes en droit d'appliquer le lemme 2.5.4.

Écrivons maintenant $f(z)$ sous la forme $f\left(re^{i\theta}\right) = u + iv$. Sous cette forme, le lemme 2.5.4 nous donne

$$\begin{aligned} u &= f(r) - \frac{1}{2}\theta^2\left(rf'(r) + r^2f''(r)\right) + O\left[\theta^3 f(r)a(r)^3\right], \\ &= f(r) - \frac{1}{2}\theta^2\left\{rf'(r) + r^2f''(r) + O\left[f(r)^{\frac{3}{5}}a(r)^3\right]\right\}, \end{aligned}$$

car $0 < |\theta| < f(r)^{-2/5}$, et

$$\begin{aligned} v &= \theta rf'(r) + O\left[\theta^3 f(r)a(r)^3\right], \\ &= \theta\left\{rf'(r) + O\left[f(r)^{\frac{1}{5}}a(r)^3\right]\right\}. \end{aligned}$$

Moyennant de longs mais faciles calculs utilisant le lemme 2.4.3 et le théorème 2.5.2, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 &= u^2 + v^2, \\ &= f(r)^2 - \theta^2\left\{f(r)\left(rf'(r) + r^2f''(r)\right) - r^2f'(r)^2 + O\left[f(r)^{\frac{8}{5}}a(r)^3\right]\right\} + \\ &\quad O\left[\theta^4 f(r)^2 a(r)^4\right], \\ &= f(r)^2 - \theta^2\left\{f(r)^2 b(r) + O\left[f(r)^{\frac{9}{5}}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Comme par 2.2.1 (b), nous avons pour les θ tels que $0 < |\theta| < f(r)^{-2/5}$,

$$\begin{aligned} f(r)^2 &= \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 + \theta^2\left\{f(r)^2 b(r) + O\left[f(r)^{\frac{9}{5}}\right]\right\}, \\ &> \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2, \end{aligned}$$

pour des r assez près de R. Par le lemme 4.1.1, nous obtenons la même inégalité pour les θ tels que $f(r)^{-2/5} < |\theta| \leq \pi$ et donc

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| < f(r),$$

pour tout r plus grand qu'un certain r_0 et pour tout $0 < |\theta| \leq \pi$. $\square$

Ce théorème justifie donc, pour $r > r_0$, les égalités $\alpha(r) = a(r)$ et $\beta(r) = b(r)$ de la section 2.2. Il montre également que du corollaire 2.3.3, on peut remplacer $f(r_n)/r_n^n$ par $M_n = M(r_n)/r_n^n$ afin d'obtenir

$$a_n \sim \frac{M_n}{\sqrt{2\pi b(r_n)}}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty,$$

où M_n et r_n sont définis à la section 2.2.

2.6 Propriétés de fermeture et "robustesse" des fonctions H-admissibles

Comme nous l'avons remarqué à la section 2.1, le succès de la méthode de Hayman en analyse combinatoire repose en grande partie sur le fait que si $f(z)$ et $g(z)$ sont H-admissibles, alors $\exp[f(z)]$ et $f(z)g(z)$ le seront encore. Les deux premiers théorèmes de cette section démontreront ces propriétés.

Par la suite, nous étudierons la "robustesse" des fonctions H-admissibles. En effet, nous verrons que le produit d'une fonction H-admissible $f(z)$ par un polynôme est toujours H-admissible. De plus, si $h(z)$ est une fonction holomorphe sur $|z| < R$ respectant certaines conditions, il suivra que $f(z) + h(z)$ sera également H-admissible sur $|z| < R$.

Théorème 2.6.1 (Exponentielle de fonctions H-admissibles) *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$, alors la fonction $\exp[f(z)]$ sera H-admissible.*

Démonstration. La preuve se fera en montrant que la fonction $F(z) = \exp[f(z)]$ satisfait les propriétés 2.2.1 (b), (c) et (d) avec $\delta(r) = f(r)^{-2/5}$ et

$$A(z) = z\frac{F'(z)}{F(z)} = zf'(z), \quad B(z) = zA'(z) = zf'(z) + z^2 f''(z),$$

remplaçant respectivement $a(z)$ et $b(z)$. Notons que la condition 2.2.1 (a) est trivialement satisfaite.

Vérifions 2.2.1 (b). Par le théorème 2.5.2 et le lemme 2.2.2, nous avons

$$
\text{(I)} \qquad \begin{aligned} B(r) &= rf'(r) + r^2 f''(r), \\ &\sim f(r)a(r) + f(r)a(r)^2, \qquad \text{lorsque } r \to R, \\ &\sim f(r)a(r)^2 \to \infty, \end{aligned}
$$

car par le lemme 2.4.3, $f(r) \to \infty$ et par le corollaire 2.3.2 du théorème principal. $a(r)^2$ tend également vers l'infini lorsque $r \to R$, d'où 2.2.1 (b) est vérifié.

Maintenant, si $|\theta| \leq \delta(r) = f(r)^{-2/5}$. le lemme 2.4.3 nous assure que pour r assez grand,

$$a(r) < f(r)^{\frac{2}{5}}.$$

Il suit que $f(r)^{-2/5} = O\left[a(r)^{-1}\right]$. Nous pouvons donc appliquer le lemme 2.5.4 afin d'obtenir

$$
\begin{aligned} \log F\left(re^{i\theta}\right) &= \log F(r) + i\theta A(r) - \frac{1}{2}\theta^2 B(r) + O\left[\theta^3 f(r)a(r)^3\right]. \\ &= \log F(r) + i\theta A(r) - \frac{1}{2}\theta^2 B(r) + O\left[f(r)^{-\frac{1}{5}}a(r)^3\right]. \end{aligned}
$$

car $|\theta|^3 < f(r)^{-6/5}$. En appliquant l'exponentielle de chaque côté. il suit que

$$F\left(re^{i\theta}\right) = F(r)e^{i\theta A(r) - \frac{1}{2}\theta^2 B(r)} e^{O[f(r)^{-\frac{1}{5}}a(r)^3]},$$

et donc,

$$F\left(re^{i\theta}\right) \sim F(r)e^{i\theta A(r) - \frac{1}{2}\theta^2 B(r)}. \qquad \text{lorsque } r \to \infty,$$

ce qui vérifie 2.2.1 (c).

Finalement, si $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$ et r est assez près de R, le lemme 4.1.1 nous donne $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq f(r) - f(r)^{1/7}$. En appliquant encore une fois l'exponentielle de chaque côté, (I) et le lemme 2.4.3 nous donnent

$$
\begin{aligned} \left|F\left(re^{i\theta}\right)\right| &\leq F(r)e^{-f(r)^{\frac{1}{7}}}, \\ &\leq F(r)e^{-B(r)^{\frac{1}{8}}}. \end{aligned}
$$

De ceci, nous constatons que

$$\lim_{r \to R} \left| \frac{\sqrt{B(r)}F\left(re^{i\theta}\right)}{F(r)} \right| \leq \lim_{r \to R} \sqrt{B(r)}e^{-B(r)^{\frac{1}{8}}} \to 0,$$

ce qui montre 2.2.1 (d) et termine la démonstration. □

Théorème 2.6.2 (Produit de fonctions H-admissibles) *Supposons que $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont H-admissibles sur $|z| < R$, alors la fonction $f(z) = f_1(z)f_2(z)$ sera également H-admissible.*

Démonstration. Soit $f(z) = f_1(z)f_2(z)$. Définissons $a(r)$, $b(r)$, $a_1(r)$, $b_1(r)$ et $a_2(r)$, $b_2(r)$ respectivement par rapport à $f(z)$, $f_1(z)$ et $f_2(z)$ comme en 2.2.1. Alors,

$$\begin{aligned} a(r) &= r\frac{(f_1(r)f_2(r))'}{f_1(r)f_2(r)}, \\ &= r\frac{f_1'(r)}{f_1(r)} + r\frac{f_2'(r)}{f_2(r)} = a_1(r) + a_2(r). \end{aligned}$$

De la même façon, nous obtenons que $b(r) = b_1(r) + b_2(r)$.

Comme $b_1(r)$ et $b_2(r)$ tendent vers l'infini lorsque $r \to \infty$, $b(r)$ tendra également vers l'infini et $f(z)$ satisfait 2.2.1 (b). Posons[5] $r_0 = \max[r_0(f_1), r_0(f_2)]$. Comme $f_1(r)$ et $f_2(r)$ sont toutes deux positives sur $r_0 \leq r < R$, $f(r)$ le sera aussi. Maintenant, supposons que $f_1(r)$ et $f_2(r)$ satisfont 2.2.1 (c) et 2.2.1 (d) pour des fonctions $\delta_1(r)$ et $\delta_2(r)$. Nous allons montrer que $f(z)$ satisfait également 2.2.1 (c) et 2.2.1 (d) avec la fonction $\delta(r) = \min[\delta_1(r), \delta_2(r)]$. Ainsi, nous aurons bien vérifié l'admissibilité de $f(z)$.

Commençons par montrer que $f(z)$ vérifie 2.2.1 (c). Nous avons

$$\begin{aligned} f\left(re^{i\theta}\right) &= f_1\left(re^{i\theta}\right) f_2\left(re^{i\theta}\right), \\ &\sim f_1(r)\exp\left[i\theta a_1(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b_1(r)\right] f_2(r)\exp\left[i\theta a_2(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b_2(r)\right], \\ &= f_1(r)f_2(r)\exp\left[i\theta(a_1(r)+a_2(r)) - \frac{1}{2}\theta^2(b_1(r)+b_2(r))\right], \end{aligned}$$

simplement en multipliant les deux relations asymptotiques car elles tiennent toutes deux pour $|\theta| < \delta(r)$.

Afin de montrer que $f(z)$ satisfait 2.2.1 (d) avec la fonction $\delta(r)$ définie plus haut, supposons que pour $r_0 < r < R$, nous ayons $b_1(r) > e$, $b_2(r) > e$. Soit $\epsilon < 1/2$, alors 2.2.1 (d) appliqué à f_1 et f_2 nous donne

$$\text{(I)} \qquad \frac{\left|f_1\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f_1(r)} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{b_1(r)}}, \qquad \text{pour } \delta_1 \leq |\theta| \leq \pi,$$

[5]Note: La notation $r_0(f_1)$, $r_0(f_2)$ est utilisée pour différencier les deux constantes r_0 intervenant dans la définition 2.2.1 (a) pour les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$.

et

$$\text{(II)} \qquad \frac{\left|f_2\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f_2(r)} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{b_2(r)}}, \qquad \text{pour } \delta_2 \leq |\theta| \leq \pi,$$

pour r assez près de R.

Pour la suite de l'argumentation, considérons les valeurs de r pour lesquelles $b_1(r) \geq b_2(r)$. Notre but sera d'étendre (I) à $\delta \leq |\theta| \leq \pi$. Si $\delta_1(r) \leq \delta_2(r)$ alors $\delta(r) = \delta_1(r)$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons que $\delta_1(r) > \delta_2(r)$. Dans ce cas, en appliquant 2.2.1 (c) à $f_1(z)$ sur $\delta_2(r) \leq |\theta| \leq \delta_1(r)$ et en minorant θ^2,
nous obtenons

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} \frac{\left|f_1\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f_1(r)} &\sim e^{-\frac{1}{2}b_1(r)\theta^2}, \qquad \text{lorsque } r \to R, \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}b_1(r)\delta_2(r)^2}. \end{aligned}$$

Notons que comme 2.2.1 (c) est uniforme en θ sur $|\theta| < \delta$, nous pouvions utiliser le résultat 2.2.1 (c) en $\theta = \delta_1(r)$.

En appliquant 2.2.1 (c) à $f_2(r)$ avec $\theta = \delta_2(r)$, encore grâce à l'uniformité en θ, nous avons

$$\frac{\left|f_2(re^{i\delta_2(r)})\right|}{f_2(r)} \sim e^{-\frac{1}{2}b_2(r)\delta_2^2}.$$

De cela et de (II), il suit que pour r assez près de R,

$$e^{-\frac{1}{2}b_2(r)\delta_2^2} < \frac{2\epsilon}{\sqrt{b_2(r)}}.$$

Nous utiliserons le fait que la fonction $t^{1/2}e^{-at}$ est décroissante lorsque t croît pour $a > 0$ et $at > 1/2$. D'où, si nous avons $y > x > e$, $\epsilon < 1/2$ et a un certain nombre positif,

$$e^{-ax} < 2\epsilon x^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{entraine que} \quad e^{-ay} < 2\epsilon y^{-\frac{1}{2}}.$$

De là, comme nous avions supposé que $b_1(r) \geq b_2(r)$,

$$e^{-\frac{1}{2}\delta_2(r)^2 b_2(r)} < \frac{2\epsilon}{\sqrt{b_2(r)}}.$$

entraine que

$$e^{-\frac{1}{2}\delta_2(r)^2 b_1(r)} < \frac{2\epsilon}{\sqrt{b_1(r)}}.$$

Donc, pour r assez près de R, (III) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\left|f_1\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f_1(r)} &\leq e^{-\frac{1}{2}b_1(r)\delta_2(r)^2}, \\ &< \frac{2\epsilon}{\sqrt{b_1(r)}}, \end{aligned}$$

et contrairement à l'inégalité (I), celle-ci tient pour $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$. Comme par hypothèse, $b(r) = b_1(r) + b_2(r) \leq 2b_1(r)$, il suit que

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\left|f_1\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f_1(r)} < \frac{2\epsilon\sqrt{2}}{\sqrt{b(r)}}, \qquad \text{pour } \delta(r) \leq \theta \leq \pi.$$

Aussi, par le théorème 2.5.6, nous avons pour $r > r_0$ et $0 < |\theta| \leq \pi$ que

$$\text{(V)} \qquad \frac{\left|f_2\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f_2(r)} < 1.$$

En multipliant les inégalités (IV) et (V), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\left|f_1\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f_1(r)}\frac{\left|f_2\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f_2(r)} &< \frac{2\epsilon\sqrt{2}}{\sqrt{b(r)}}\cdot 1, \\ &< \frac{5\epsilon}{\sqrt{b(r)}}. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| < 5\epsilon f(r)/\sqrt{b(r)}$ pour un ϵ arbitraire. $0 < \theta \leq \pi$ et r suffisamment près de R. Ceci prouve 2.2.1 (d) pour $f(z)$ et termine la démonstration du théorème. □

Nous avons finalement démontré les deux propriétés de fermeture des fonctions H-admissibles. Attaquons-nous maintenant à leurs propriétés de robustesse.

Théorème 2.6.3 (Multiplication par un polynôme) *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$. Supposons également que*

$$\mathcal{P}(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$$

est un polynôme à coefficients réels tel que $\mathcal{P}(R) > 0$ *si* $R < \infty$ *et* $b_m > 0$ *si* $R = \infty$. *Alors* $f(z)\mathcal{P}(z)$ *est H-admissible sur* $|z| < R$.

Démonstration. Supposons que $a(r)$ et $b(r)$ sont définis pour $f(z)$ comme en 2.2.1 et que 2.2.1 (c), 2.2.1 (d) tiennent pour une certaine fonction $\delta(r)$. Nous supposons également que

$$\text{(I)} \qquad \delta(r) \le \left[\frac{2\log b(r)}{b(r)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

car dans le cas contraire, pour $\left[\frac{2\log b(r)}{b(r)}\right]^{1/2} \le |\theta| \le \delta(r)$, 2.2.1 (c) nous donnerait

$$\begin{aligned} \frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f(r)} &\sim \exp\left[-\frac{1}{2}b(r)\theta^2\right], \\ &\le \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2\log b(r)}{b(r)}\right)b(r)\right], \qquad \text{en minorant } \theta^2. \\ &= \frac{1}{b(r)}, \end{aligned}$$

d'où il suivrait que

$$\sqrt{b(r)}\,\frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f(r)} \le \frac{1}{\sqrt{b(r)}} \to 0, \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

Comme la propriété 2.2.1 (d) serait également vérifiée pour $\left[\frac{2\log b(r)}{b(r)}\right]^{1/2} \le |\theta| \le \delta(r)$, nous pouvons donc remplacer $\delta(r)$ par $\min\left[\delta(r), \frac{2\log b(r)}{b(r)}\right]$ tout en conservant les propriétés 2.2.1 (c) et 2.2.1 (d).

Aussi, si $R = \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{r\to R}\left|\frac{\mathcal{P}\left(re^{i\theta}\right)}{\mathcal{P}(r)} - 1\right| &= \lim_{r\to R}\left|\frac{b_m r^m e^{im\theta}(1+o(1))}{b_m r^m(1+o(1))} - 1\right|, \\ &= \lim_{r\to R}\left|e^{im\theta} - 1\right|, \\ &\le \lim_{r\to R} m\theta \le \lim_{r\to R} m\delta(r) = 0. \end{aligned}$$

Il suit que

$$\text{(II)} \qquad \frac{\mathcal{P}\left(re^{i\theta}\right)}{\mathcal{P}(r)} \sim 1, \qquad \text{lorsque } r \to R,$$

uniformément pour $|\theta| \leq \delta(r)$. De plus, si $R < \infty$, nous avons

$$\mathcal{P}(re^{i\theta}) \sim \mathcal{P}(r) \sim \mathcal{P}(R),$$

où la seconde relation asymptotique est évidente et la première garantie par la continuité de $\mathcal{P}(z)$ et le fait que $\delta(r) \to 0$ lorsque $r \to R$. Il suit que les fonctions $\mathcal{P}(r)$ et $f(r)\mathcal{P}(r)$ sont toutes deux positives pour r assez près de R. Aussi, (II) et 2.2.1 (c) nous disent que

$$\textbf{(III)} \qquad \frac{f\left(re^{i\theta}\right)\mathcal{P}\left(re^{i\theta}\right)}{f(r)\mathcal{P}(r)} \sim e^{i\theta a(r)-\frac{1}{2}\theta^2 b(r)}, \qquad \text{lorsque } r \to R,$$

uniformément pour $|\theta| < \delta(r)$.

Maintenant, si R est fini, $|\mathcal{P}(z)|$ est borné dans $|z| < R$ et $\mathcal{P}(r)$ est borné inférieurement lorsque $r \to R$. Nous avons donc sur $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$,

$$\textbf{(IV)} \qquad \frac{\mathcal{P}\left(re^{i\theta}\right)}{\mathcal{P}(r)} = O(1), \qquad \text{lorsque } r \to R.$$

Si $R = \infty$, nous avons

$$\frac{\left|\mathcal{P}\left(re^{i\theta}\right)\right|}{\mathcal{P}(r)} \to 1, \qquad \text{lorsque } r \to \infty,$$

uniformément en θ et (IV) tient dans les deux cas. D'où, en appliquant 2.2.1 (d) à $f(z)$ et en utilisant (IV), nous déduisons que

$$\textbf{(V)} \qquad \begin{aligned} \frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\mathcal{P}\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f(r)\mathcal{P}(r)} &= o\left[\sqrt{b(r)}\right] O(1), \\ &= o\left[\sqrt{b(r)}\right], \qquad \text{lorsque } r \to \infty, \end{aligned}$$

uniformément pour $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$.

Pour compléter la preuve que $f(z)\mathcal{P}(z)$ est H-admissible, il ne nous reste qu'à montrer que l'on peut remplacer $a(r)$ et $b(r)$ respectivement par

$$a(r) + \frac{r\mathcal{P}'(r)}{\mathcal{P}(r)} \quad \text{et} \quad b(r) + r\frac{d}{dr}\left(\frac{r\mathcal{P}'(r)}{\mathcal{P}(r)}\right),$$

dans les relations asymptotiques (III) et (V). Comme $\delta(r) \to 0$ et que $r\frac{\mathcal{P}'(r)}{\mathcal{P}(r)}$ et $r\frac{d}{dr}\left(\frac{r\mathcal{P}'(r)}{\mathcal{P}(r)}\right)$ demeurent bornées lorsque $r \to \infty$, nous avons pour (III),

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to R} \frac{f\left(re^{i\theta}\right)\mathcal{P}\left(re^{i\theta}\right)}{f(r)\mathcal{P}(r)} \exp\left[\frac{1}{2}\theta^2\left(b(r)+r\frac{d}{dr}\left(\frac{r\mathcal{P}'(r)}{\mathcal{P}(r)}\right)\right) - i\theta\left(a(r)+\left(\frac{r\mathcal{P}'(r)}{\mathcal{P}(r)}\right)\right)\right]. \\
= 1\cdot\lim_{r\to R}\exp\left[\frac{1}{2}\theta^2 r\frac{d}{dr}\left(\frac{r\mathcal{P}'(r)}{\mathcal{P}(r)}\right) - i\theta\left(\frac{r\mathcal{P}'(r)}{\mathcal{P}(r)}\right)\right]. \\
= 1,
\end{aligned}$$

et donc que 2.2.1 (c) est vérifié pour $f(z)\mathcal{P}(z)$. De même, pour (V), nous obtenons

$$\lim_{r\to R} \frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\mathcal{P}\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f(r)\mathcal{P}(r)} = o\left[b(r)+r\frac{d}{dr}\left(\frac{r\mathcal{P}'(r)}{\mathcal{P}(r)}\right)\right],$$

ce qui montre que $f(z)\mathcal{P}(z)$ vérifie 2.2.1 (d) et termine la démonstration. □

Le prochain théorème montrera que si $g(z)$ est de croissance moins rapide que $f(z)$, alors $f(z)+g(z)$ sera encore une fonction H-admissible.

Théorème 2.6.4 (Addition d'une "petite" fonction) *Supposons que $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$ et que $g(z)$ est holomorphe sur $|z| < R$, réelle pour tout z réel et qu'il existe une constante positive λ telle que*

(a) $$M(r,g) = \max_{|z|=r}|g(z)| = O\left[f(r)^{1-\lambda}\right], \qquad \textit{lorsque } r \to R.$$

Alors $F(z) = f(z)+g(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$.

Démonstration. Comme $f(z)$ est supposée H-admissible sur $|z| < R$, il suit de la condition (a) que $F(r) = f(r)+g(r) > 0$ pour r suffisamment près de R. Toujours par 2.2.1 (c), 2.2.1 (d), nous avons pour $f(z)$,

(I) $$f\left(re^{i\theta}\right) \sim f(r)e^{i\theta a(r)-\frac{1}{2}\theta^2 b(r)}, \qquad \text{lorsque } r \to R,$$

uniformément pour $|\theta| < \delta(r)$, et

(II) $$f\left(re^{i\theta}\right) = o\left[\frac{f(r)}{\sqrt{b(r)}}\right], \qquad \text{lorsque } r \to R,$$

pour $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$. Nous pouvons à nouveau utiliser la même hypothèse sur $\delta(r)$ qu'au théorème 2.6.3, à savoir que

$$\delta(r) \leq \left[\frac{2\log b(r)}{b(r)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, de (I), en majorant θ^2 et en utilisant le lemme 2.4.3, il suit lorsque $r \to R$.

$$\begin{aligned}
\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| &\sim f(r)e^{-\frac{1}{2}\theta^2 b(r)}, \\
&\geq f(r)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2\log b(r)}{b(r)}\right)b(r)\right], \\
&= \frac{f(r)}{b(r)}, \\
&> f(r)^{1-\frac{\epsilon}{2}}.
\end{aligned}$$

Par (I) et (a) appliqué à $g\left(re^{i\theta}\right)/f(r)$ et $g(r)/f(r)$, il suit que pour $|\theta| \leq \delta(r)$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to R}\frac{f\left(re^{i\theta}\right)+g\left(re^{i\theta}\right)}{f(r)+g(r)} \\
&= \lim_{r\to R}\frac{f(r)\exp\left[i\theta a(r)-\frac{1}{2}\theta^2 b(r)\right]+g\left(re^{i\theta}\right)}{f(r)+g(r)}, \\
&= \lim_{r\to R}\frac{\exp\left[i\theta a(r)-\frac{1}{2}\theta^2 b(r)\right]+\dfrac{g\left(re^{i\theta}\right)}{f(r)}}{1+\dfrac{g(r)}{f(r)}}, \\
&= e^{i\theta a(r)-\frac{1}{2}\theta^2 b(r)}.
\end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$\textbf{(III)} \qquad \begin{aligned}
F\left(re^{i\theta}\right) &= f\left(re^{i\theta}\right)+g\left(re^{i\theta}\right) \\
&\sim [f(r)+g(r)]e^{i\theta a(r)-\frac{1}{2}\theta^2 b(r)}, \qquad \text{lorsque } r\to R.
\end{aligned}$$

De la même façon, par (a) appliqué à $g(r)/f(r)$ et le lemme 2.4.3, pour $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to R} \frac{\sqrt{b(r)}\left|\dfrac{f\left(re^{i\theta}\right)}{f(r)} + \dfrac{g\left(re^{i\theta}\right)}{f(r)}\right|}{1+\dfrac{g(r)}{f(r)}}
&\leq \lim_{r\to R} \sqrt{b(r)} \left[\frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f(r)} + \frac{\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f(r)}\right]. \\
&= \lim_{r\to R} \sqrt{b(r)}\, \frac{O\left[f(r)^{1-\lambda}\right]}{f(r)}, \qquad \text{par (II) et (a).} \\
&= \lim_{r\to R} O\left[f(r)^{\frac{\epsilon}{2}}\right] O\left[f(r)^{-\lambda}\right], \\
&= \lim_{r\to R} O\left[f(r)^{\frac{\epsilon}{2}-\lambda}\right] = 0, \qquad \text{si } \epsilon < 2\lambda.
\end{aligned}$$

et de (II) nous obtenons

$$\textbf{(IV)} \qquad F\left(re^{i\theta}\right) = f\left(re^{i\theta}\right) + g\left(re^{i\theta}\right) = \frac{o[f(r)+g(r)]}{\sqrt{b(r)}}.$$

Pour compléter la preuve de l'admissibilité de $F(z)$, nous montrerons que si

$$A(r) = r\frac{F'(r)}{F(r)} \quad \text{et} \quad B(r) = rA'(r),$$

alors

$$A(r) = a(r) + o(1) \quad \text{et} \quad B(r) = b(r) + o(1),$$

car si tel est le cas, nous pourrons remplacer $a(r)$ par $A(r)$ et $b(r)$ par $B(r)$ dans (III) et (IV) pour obtenir 2.2.1 (c), 2.2.1 (d) pour $F(z)$. Évidemment, 2.2.1 (b) suivra automatiquement. Vérifions que nous pouvons effectivement faire cette substitution.

Supposons que $|r-\zeta| \leq r/a(r)$. Alors par le principe du maximum et le lemme 2.4.4,

$$\begin{aligned}
g(\zeta) &\leq \max_{|r-\zeta|<r/a(r)} |g(\zeta)|, \\
&\leq \max_{|\zeta|\leq r+r/a(r)} |g(\zeta)|, \\
&= O\left[f\left(r+\frac{r}{a(r)}\right)^{1-\lambda}\right], \qquad \text{par (a),} \\
&= O\left[f(r)^{1-\lambda}\right].
\end{aligned}$$

Il suit donc, par (a), le lemme 2.4.3 et la formule de Cauchy pour les dérivées, que pour tout entier n fixe,

$$\textbf{(V)}\qquad \begin{aligned} \left|g^{(n)}(r)\right| &\le n!\left(\frac{a(r)}{r}\right)^n \max_{|\zeta-r|\le r/a(r)} |g(\zeta)|, \\ &= \frac{a(r)^n O\left[f(r)^{1-\lambda}\right]}{r^n}, \\ &= \frac{O\left[f(r)^{n\epsilon}\right] O\left[f(r)^{1-\lambda}\right]}{r^n}, \\ &= \frac{O\left[f(r)^{1-\frac{1}{2}\lambda}\right]}{r^n}, \qquad \text{en choisissant } \epsilon < \delta/2n. \end{aligned}$$

De plus, comme $\dfrac{1}{1+g(r)/f(r)} = 1 + O\left[g(r)/f(r)\right]$ et $O\left[f(r)^{-\frac{1}{2}\lambda}\right] = o(1)$ lorsque $r \to R$, par (a), (V) et le théorème 2.5.2 nous aurons

$$\begin{aligned} A(r) &= r\frac{f'(r)+g'(r)}{f(r)+g(r)}, \\ &= r\frac{\dfrac{f'(r)}{f(r)}\left(1+\dfrac{g'(r)}{f'(r)}\right)}{\left(1+\dfrac{g(r)}{f(r)}\right)}, \\ &= r\left(1+O\left[\frac{g(r)}{f(r)}\right]\right)\left(1+O\left[\frac{g'(r)}{f'(r)}\right]\right), \\ &= r\frac{f'(r)}{f(r)}(1+o(1))\left(1+O\left[\frac{O\left[f(r)^{1-\frac{1}{2}\lambda}\right] r}{rf(r)a(r)}\right]\right), \\ &= r\frac{f'(r)}{f(r)}(1+o(1))\left(1+O\left[f(r)^{-\frac{1}{2}\lambda}\right]\right), \\ &= r\frac{f'(r)}{f(r)}(1+o(1))(1+o(1)), \\ &= a(r)+o(1). \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes idées, à savoir l'hypothèse (a), l'inégalité (V) et le théorème 2.5.1, nous trouvons, après beaucoup de calculs, que

$$B(r) = b(r) + o(1).$$

Nous pouvons donc remplacer $a(r)$, $b(r)$ respectivement par $A(r)$ et $B(r)$ dans (III) et

(IV) pour obtenir

$$F\left(re^{i\theta}\right) \sim F(r)e^{i\theta A(r)-\frac{1}{2}\theta^2 B(r)}, \qquad \text{lorsque } r \to R,$$

et

$$F\left(re^{i\theta}\right) = o\left[\frac{F(r)}{\sqrt{B(r)}}\right],$$

ce qui complète la démonstration. □

De ce théorème, nous déduisons immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 2.6.5 *Si $\mathcal{P}(z) = b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m$ est un polynôme à coefficients réels et si $f(z)$ est H-admissible sur $|z| < R$, alors $f(z)+\mathcal{P}(z)$ l'est aussi, tout comme $\mathcal{P}(f(z))$ si $b_m > 0$.*

Démonstration. Par le lemme 2.4.3, il est clair que la condition (a) du théorème 2.6.4 est respectée. Comme $\mathcal{P}(z)$ est à coefficients réels, il suit immédiatement que $f(z) + \mathcal{P}(z)$ est H-admissible.

Supposons maintenant que $b_m > 0$. Par m applications du théorème 2.6.3, il suit que $f(z)^m$ est H-admissible, et aussi $b_mf(z)^m$ par le théorème 2.6.3 appliqué au polynôme constant b_m. Si $g(z)$ est définie comme

$$g(z) = b_0 + b_1f(z) + \cdots + b_{m-1}z^{m-1},$$

alors

$$\begin{aligned} M(r,g) &= O\left[f(r)^{m-1}\right], \\ &= O\left[(b_mf(r)^m)^{1-\frac{1}{m}}\right], \qquad \text{lorsque } r \to R. \end{aligned}$$

et ainsi, par le théorème 2.6.4, $\mathcal{P}(f(z)) = b_mf(z)^m + g(z)$ est encore une fonction H-admissible. □

2.7 Exemples et applications de la méthode de Hayman

Nous sommes maintenant en mesure de donner quelques exemples utiles de fonctions H-admissibles. Comme nous l'avions remarqué au chapitre I, la formule exponentielle nous permet de trouver facilement la fonction génératrice associée à de nombreux problèmes d'analyse combinatoire. Nous verrons que dans plusieurs cas, lorsque l'énumérateur de piles $\mathcal{P}(z)$ est un polynôme, l'énumérateur de mains $\mathcal{M}(z) = e^{\mathcal{P}(z)}$ sera une fonction H-admissible.

Théorème 2.7.1 (Exponentielle d'un polynôme) *Supposons que $\mathcal{P}(z) = b_0 + b_1(z) + \cdots + b_k z^k$, où $b_k \neq 0$ et $k \geq 1$, est un polynôme à coefficients réels, et que*

$$\mathcal{M}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = e^{\mathcal{P}(z)}.$$

Alors les cinq conditions suivantes sont équivalentes.

(a) $\mathcal{M}(z)$ est H-admissible dans le plan.

(b) Pour tout r suffisamment grand, nous avons

$$\left|\mathcal{M}\left(re^{i\theta}\right)\right| < \mathcal{M}(r), \qquad \text{pour } 0 < |\theta| \leq \pi.$$

(c) Pour tout entier $d > 1$, il existe un entier m tel que d n'est pas un facteur de m et $b_m \neq 0$. De plus, si $m = m(d)$ est le plus grand tel entier, alors $b_{m(d)} > 0$.

(d) Si M_n est défini comme à la section 2.2 alors

$$a_n \sim \frac{M_n}{\sqrt{2\pi k n}} \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

(e) $a_n > 0$ pour tout entier n suffisamment grand.

Démonstration.

(a) ⇒(b) Ceci est une conséquence immédiate du théorème 2.5.6.

(b) ⇒(c) Démontrons par l'absurde que (b) implique (c). Supposons qu'il existe un entier $d > 1$ tel que $b_m = 0$ sauf lorsque $d \mid m$. Alors $\mathcal{P}(z)$ est de la forme

$$\mathcal{P}(z) = b_0 + b_d z^d + \cdots + b_{ld} z^{ld},$$

pour un certain entier $l \geq 1$, et

$$\begin{aligned} f\left(re^{\left(\frac{2\pi i}{d}\right)}\right) &= \exp\left[b_0 + b_d\left(re^{\left(\frac{2\pi i}{d}\right)}\right)^d + \cdots + b_{ld}\left(re^{\left(\frac{2\pi i}{d}\right)}\right)^{ld}\right], \\ &= \exp\left[b_0 + b_d r^d + \cdots + b_{ld} r^{ld}\right], \\ &= f(r), \end{aligned}$$

ceci pour des r arbitrairement grands, ce qui contredit (b). Nous pouvons donc exclure cette possibilité. Nous savons donc que pour tout $d > 1$, il existe un entier $m(d)$ tel que $b_{m(d)} \neq 0$.

Supposons maintenant que $b_{m(d)} < 0$ pour un certain entier $d > 1$. Écrivons $\mathcal{P}(z)$ sous la forme

$$\mathcal{P}(z) = u(z) + iv(z) = \sum_{m=0}^{k} b_m r^m(\cos m\theta + i \sin m\theta).$$

Alors

$$\begin{aligned} u\left(re^{\left(\frac{2\pi i}{d}\right)}\right) - u(r) &= \sum_{m=0}^{k}\left(b_m r^m \cos\left(\frac{2\pi m}{d}\right) - b_m r^m\right), \\ &= \sum_{m=0}^{k} b_m r^m\left(\cos\left(\frac{2\pi m}{d}\right) - 1\right), \\ &= b_{m(d)} r^{m(d)}\left(\cos\left(\frac{2\pi m(d)}{d}\right) - 1\right) + O\left[r^{m(d)-1}\right]. \end{aligned}$$

où, par hypothèse, $b_{m(d)} < 0$ et $\cos(2\pi m(d)/d) < 1$ car $d \not| \, m(d)$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que pour tout r assez grand,

$$u\left(re^{\left(\frac{2\pi i}{d}\right)}\right) > u(r) + Cr^{m(d)}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \left|f\left(re^{\left(\frac{2\pi i}{d}\right)}\right)\right| &= \left|e^{\mathcal{P}(z)}\right|, \\ &= e^{u(z)}, \\ &> e^{u(r)+Cr^{m(d)}}, \qquad \text{pour } C > 0 \text{ et } r \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

Autrement dit, $\left|f\left(re^{(2\pi i/d)}\right)\right| > f(r)\exp\left[Cr^{m(d)}\right]$, pour r suffisamment grand, ce qui contredit (b), et nous avons bien que (b) $\Rightarrow$ (c).

(c) ⇒(a) Nous allons vérifier que $f(z) = e^{\mathcal{P}(z)}$ satisfait les conditions 2.2.1 (a), (b), (c) et (d). Comme l'exponentielle d'un nombre réel est toujours positive, la condition 2.2.1 (a) est trivialement vérifiée. Définissons $a(r)$ et $b(r)$ comme en 2.2.1, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} a(r) &= \frac{re^{\mathcal{P}(r)}\left(\sum_{m=1}^{k} mb_m r^{m-1}\right)}{e^{\mathcal{P}(r)}}, \\ &= \sum_{m=1}^{k} mb_m r^m, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b(r) &= r\left(\sum_{m=1}^{k} mb_m r^m\right)', \\ &= \sum_{m=1}^{k} m^2 b_m r^m. \end{aligned}$$

Par (c), en posant $d = k+1$, nous déduisons que $b_k > 0$ et $b(r) \sim k^2 b_k r^k \to \infty$ lorsque $r \to \infty$ et la condition 2.2.1 (b) est également vérifiée. Voyons si $f(z)$ satisfait à la condition 2.2.1 (c). Comme $e^{\mathcal{P}(z)}$ est holomorphe et ne s'annule jamais, nous pouvons appliquer le lemme 2.5.3 pour obtenir

$$\text{(I)} \qquad \mathcal{P}\left(re^{i\theta}\right) = \mathcal{P}(r) + i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r) + O\left[\theta^3 r^k\right], \quad \text{lorsque } r \to \infty,$$

uniformément en θ, où le $O\left[\theta^3 r^k\right]$ provient du $\epsilon(r,\theta)$ avec $b(r)$ remplacé par $O\left[r^k\right]$. De cela, en posant $\delta(r) = r^{-k/3-1/7}$, nous obtenons pour $|\theta| < \delta(r)$,

$$\begin{aligned} f\left(re^{i\theta}\right) &= f(r)e^{i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r) + O\left[\theta^3 r^k\right]}, \\ &= f(r)e^{i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r) + O\left[r^{-3/7}\right]}, \\ &\sim f(r)e^{i\theta a(r) - \frac{1}{2}\theta^2 b(r)}, \qquad \text{lorsque } r \to R, \end{aligned}$$

ce qui vérifie 2.2.1 (c). Attaquons-nous maintenant à 2.2.1 (d), la partie corsée de la démonstration. Comme $b(r) \sim k^2 b_k r^k$, nous aurons pour r assez grand,

$$\begin{aligned} \left|f\left(re^{i\delta(r)}\right)\right| &\sim f(r)\exp\left[-\frac{1}{2}b(r)r^{-2\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{7}\right)}\right], \\ &\sim f(r)\exp\left[-\frac{1}{2}k^2 b_k r^k r^{-2\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{7}\right)}\right], \\ &\sim f(r)\exp\left[-\frac{1}{2}k^2 b_k r^{\left(\frac{k}{3}-\frac{2}{7}\right)}\right], \end{aligned}$$

d'où, pour tout r assez grand,

$$\text{(II)} \qquad \left|f\left(re^{i\delta(r)}\right)\right| < f(r)\exp\left[-r^{\frac{1}{22}}\right]$$

car $k/3 - 2/7 \geq 1/21$. Pour montrer que $f(z)$ vérifie 2.2.1 (d) et ainsi terminer la preuve, il suffira de montrer que (II) tient également pour $\delta(r) \leq |\theta| \leq \pi$. Comme (II) tient dans un certain voisinage de $|\theta| = \delta(r)$, il ne nous reste qu'à vérifier ce qui se passe pour les valeurs de θ telles que $\frac{\partial}{\partial\theta}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| = 0$.

En posant à nouveau $u = \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{m=0}^{k} b_m r^m \cos m\theta\right), \\
&= -\sum_{m=0}^{k} m b_m r^m \sin m\theta, \\
&= -k b_k r^k \sin k\theta + O\left[r^{k-1}\right], \\
&= -k b_k r^k \left(\sin k\theta + O\left[r^{-1}\right]\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0$ implique que $\sin k\theta = \Psi(r) = O\left[r^{-1}\right]$. Concentrons-nous sur l'intervalle $k\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Pour r assez grand, nous pouvons appliquer arcsin à $\Psi(r)$. En prenant le développement limité d'ordre 3 de la fonction arcsin, nous obtenons

$$\begin{aligned}
k\theta &= \Psi(r) + O\left[\Psi(r)^3\right], \\
&= O\left[r^{-1}\right], \qquad \text{pour } k\theta \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

En enlevant la restriction sur $k\theta$, nous trouvons que $k\theta = \nu\pi + O\left[r^{-1}\right]$ pour un ν entier.

Si $\nu = 0$ alors pour $\delta(r) < |\theta| \leq O\left[r^{-1}\right]$, (I) et (II) nous assurent que pour tout r assez grand,

$$\begin{aligned}
\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| &= f(r)\exp\left[-\left(\frac{1}{2}b(r) + O\left[r^{k-1}\right]\right)\theta^2\right], \\
&< f(r)\exp\left[-\left(\frac{1}{2}k^2 b_k r^k + O\left[r^{k-1}\right]\right) r^{-2\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{7}\right)}\right], \\
&< f(r)\exp\left[-r^{\frac{1}{22}}\right].
\end{aligned}$$

Maintenant, supposons que $1 \leq \nu \leq 2k-1$ et posons $\phi = \theta - \frac{\nu\pi}{k}$. Il suit que $\phi = O\left[r^{-1}\right]$ lorsque $r \to \infty$. Soit d le plus petit entier tel que $2k \mid d\nu$. Écrivons $\frac{2k}{\nu} = \frac{r}{s}$

où r et s sont relativement premiers. Nous allons montrer que pour $m \neq 0$.

$$\cos\left(\frac{m\nu\pi}{k}\right) = 1 \Leftrightarrow r \mid m.$$

Supposons que $\cos(m\nu\pi/k) = 1$. Cela implique que $\frac{m\nu}{k} = 2l$ pour un entier $l \geq 1$. En réécrivant cette équation à l'aide de $\frac{\nu}{k}$ sous forme réduite[6], il suit que $\frac{m\nu}{k} = m\frac{2s}{r} = 2l$. Comme $l \in \mathcal{N}$ et que $r \nmid s$, r doit diviser m.

Si $r \mid m$, alors $\frac{m\nu}{k} = \frac{2sm}{r}$ est un nombre pair et $\cos(m\nu\pi/k) = 1$.

Ceci dit, analysons de plus près $u\left(re^{i\theta}\right) - u\left(re^{i\phi}\right)$. Nous avons

$$\begin{aligned} u\left(re^{i\theta}\right) - u\left(re^{i\phi}\right) &= \sum_{m=0}^{k} b_m r^m \left[\cos(m\theta) - \cos(m\phi)\right], \\ &= \sum_{m=0}^{k} b_m r^m \left[\cos(m\phi)\left(\cos\left(\frac{m\nu\pi}{k}\right) - 1\right) - \sin(m\phi)\sin\left(\frac{m\nu\pi}{k}\right)\right]. \end{aligned}$$

Pour $m > m(d)$, nous savons que $d \mid m$ et donc $m = dl$ pour un certain entier $l \geq 1$. D'où $\frac{m\nu}{k} = \frac{\nu dl}{k}$ et comme $2 \mid \frac{\nu dl}{k}$, il suit que $\cos(m\nu\pi/k) = 1$ et $\sin(m\nu\pi/k) = 0$. Tous les termes de $u\left(re^{i\theta}\right) - u\left(re^{i\phi}\right)$ de degré plus grand que $m(d)$ seront donc nuls.

Vérifions que $\cos(m\nu\pi/k) \neq 1$ pour $m = m(d)$. Par définition de d, nous avons $2kl = d\nu$ avec n et d relativement premiers. Comme nous avons également que $2ks = r\nu$ avec r et s relativement premiers, il suit que $s = n$ et $r = d$. Comme par hypothèse. $d \nmid m(d)$. nous avons que $r \nmid m(d)$ et $\cos(m\nu\pi/k)$ est bien différent de 1.

Nous pouvons donc exprimer $u\left(re^{i\theta}\right) - u\left(re^{i\phi}\right)$ comme

$$\begin{aligned} u\left(re^{i\theta}\right) - u\left(re^{i\phi}\right) &= \sum_{m=0}^{m(d)} b_m r^m \left[\cos(m\theta) - \cos(m\phi)\right], \\ &= \sum_{m=0}^{m(d)} b_m r^m \left[\cos\left(\frac{m\nu\pi}{k}\right) + O\left[r^{-1}\right] - 1 + O\left[r^{-1}\right]\right]. \\ &= b_{m(d)} r^{m(d)} \left[\cos\left(\frac{m(d)\nu\pi}{k}\right) - 1\right] + O\left[r^{m(d)-1}\right]. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse (c), $b_{m(d)} > 0$ et le coefficient de $r^{m(d)}$ est strictement négatif. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$u\left(re^{i\theta}\right) < u\left(re^{i\phi}\right) - Cr^{m(d)} < u(r) - Cr^{m(d)},$$

[6]Le terme "forme réduite" signifie que ν et k ne possèdent aucun facteur commun.

où la seconde inégalité provient du fait que $\phi = O\left[r^{-1}\right]$. De cela, il suit que

$$\begin{aligned}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| &< f(r)\exp\left[-Cr^{m(d)}\right], \\ &< f(r)\exp\left[-r^{\frac{1}{22}}\right],\end{aligned}$$

et (II) tient toujours. Comme $b_k > 0$, nous avons aussi pour tout r assez grand,

$$\begin{aligned}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| &< f(r)\exp\left[-b(r)^{\frac{1}{23k}}\right], \\ &< \frac{f(r)}{b(r)}, \qquad \text{pour } \delta(r) \leq |\theta| \leq \pi.\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{r\to R}\frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{f(r)}b(r) \leq \lim_{r\to R} b(r)\exp\left[-b(r)^{\frac{1}{23k}}\right] = 0,$$

Cela montre que $f\left(re^{i\theta}\right) = o\left[f(r)/\sqrt{b(r)}\right]$ et termine la preuve de l'admissibilité de $f(z)$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Jusqu'à présent, nous avons montré que (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c). Sous l'hypothèse (c), nous pouvons donc supposer que $f(z)$ est H-admissible dans le plan et utiliser le corollaire 2.3.3, lequel nous donne

$$a_n \sim \frac{f(r_n)}{r_n^n\sqrt{2\pi b(r_n)}}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Par le théorème 2.5.6, nous savons que pour les fonctions H-admissibles, on peut remplacer $f(r)$ par $M(r, f) = \sup_{|\theta|\leq\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$, ce qui nous donne

$$a_n \sim \frac{M_n}{\sqrt{2\pi b(r_n)}}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Mais ici,

$$\begin{aligned}b(r_n) &= \sum_{m=0}^{k} m^2 b_m r_n^m, \\ &\sim k^2 b_k r_n^k, \\ &\sim k\sum_{m=0}^{k} m b_m r_n^m = ka(r_n) = kn, \qquad \text{lorsque } n \to \infty,\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

(d) $\Rightarrow$*(e)* Cela est clair par le lemme 2.4.2.

(e) $\Rightarrow$*(c)* Encore afin d'obtenir une contradiction, supposons qu'il existe un entier $d > 1$ tel que $b_m = 0$ sauf lorsque $d \not| m$. Dans ce cas, écrivons $f(z) = e^{\mathcal{P}(z)}$ comme

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \\ &= \exp\left[b_0 + b_d z^d + \cdots + b_{ld} z^{ld}\right], \\ &= e^{b_0}\left(1 + b_d z^d + \frac{(b_d z^d)^2}{2!} + \cdots\right) \cdots \left(1 + b_{ld} z^{ld} + \frac{(b_{ld} z^{ld})^2}{2!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Sous cette forme, nous remarquons que tous les coefficients a_n où $d \not| n$ seront nuls, ce qui contredit évidemment (e).

Supposons maintenant que $b_{m(d)} < 0$ pour un certain entier $d > 1$. Comme dans la démonstration de *(b)* $\Rightarrow$*(c)*, nous avons encore que $\left|f\left(re^{(2\pi i/d)}\right)\right| > f(r)\exp\left[Cr^{m(d)}\right]$, mais par (e), nous avons également

$$\begin{aligned} \left|f\left(re^{\left(\frac{2\pi i}{d}\right)}\right)\right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n, \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n + O\left[r^N\right], \\ &\leq 2f(r), \qquad \text{pour tout } r \text{ assez grand,} \end{aligned}$$

d'où la contradiction. $\square$

Notons que la formule de Faà di Bruno 1.1.6 nous permet de déduire le corollaire suivant.

Corollaire 2.7.2 *Si $\mathcal{P}(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k$, $b_k \neq 0$, est un polynôme à coefficients réels non négatifs, alors nous pouvons obtenir une relation asymptotique pour les coefficients de $e^{\mathcal{P}(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

Démonstration. Si $\mathcal{P}(z)$ satisfait à la condition (c) du théorème 2.7.1, alors il suffit de l'appliquer pour obtenir le résultat. Sinon, comme tous les coefficients b_m sont non négatifs, c'est qu'il existe des entiers $d > 1$ et $l \geq 1$ tels que

$$\mathcal{P}(z) = b_0 + b_d z^d + \cdots + b_{ld} z^{ld}.$$

Dans ce cas, posons $\mathcal{P}(z) = Q(z^d)$. Définissons ensuite la *forme réduite* de $\mathcal{P}(z)$ comme étant le polynôme $Q(z)$. Il suit que $Q(z)$ satisfera à la condition 2.7.1 (c). Nous pouvons donc appliquer ce théorème afin d'obtenir une relation asymptotique pour les coefficients a'_n de la fonction

$$F(z) = e^{\mathcal{Q}(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \frac{z^n}{n!}.$$

Pour transformer cette information en relation asymptotique pour les coefficients a_n de la fonction $e^{\mathcal{P}(z)}$, il suffit de remarquer qu'en posant

$$A(z) = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \frac{z^n}{n!}, \quad \text{et} \quad B(z) = z^d.$$

nous pouvons appliquer 1.1.6 pour obtenir

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{P}(z)} &= e^{\mathcal{Q}(z^d)}, \\ &= A(B(z)), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}, \end{aligned}$$

où

$$c_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} a'_k B_{n,k}(0, \ldots, \overset{x_d}{\widehat{1}}, 0, \ldots).$$

Par la propriété des $B_{n,k}$ que nous avions soulignée à la section 1.1, nous savons que $B_{n,k} = 0$ sauf lorsque $k = n/d$ (avec bien sûr $k \in \mathcal{N}$). Il suit que tous les c_n où $d \not| \, n$ seront nuls. Pour les autres, $n = ds$ pour un certain entier $s \geq 1$ et

$$\begin{aligned} c_n = c_{ds} &= a'_s B_{n,s}(0, \ldots, \overset{x_d}{\widehat{1}}, 0, \ldots), \\ &= a'_s \frac{n!}{s!(d!)^s}. \end{aligned}$$

Comme $a_n = [z^n] e^{\mathcal{P}(z)} = [z^n] e^{\mathcal{Q}(z)} = c_n/n!$, nous aurons $a_n = 0$ si $d \not| \, n$. Si $d \mid n$ et que $n = ds$, alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a'_s}{s!(d!)^s}, \\ &\sim \frac{F(r_n)}{s!(d!)^s r_n^n \sqrt{2\pi b(r_n)}}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty, \end{aligned}$$

où r_n et $b(r_n)$ sont calculés pour la fonction $F(z) = e^{\mathcal{Q}(z)}$. □

Soulignons que la démonstration du corollaire 2.7.2 peut parfois s'appliquer au cas où le polynôme $\mathcal{P}(z)$ possède certains coefficients négatifs. Par exemple, considérons

$\mathcal{P}(z) = 1 - z^2 + z^4 + z^6$. Il est évident que $\mathcal{P}(z)$ ne vérifie pas à 2.7.1 (c) mais sous forme réduite, le polynôme $Q(z) = 1 - z + z^2 + z^3$ satisfait 2.7.1 (c) (il suffit de vérifier avec $d = 2, 3$). Par le théorème 2.7.1, nous pouvons donc obtenir une relation asymptotique pour les coefficients de $e^{Q(z)}$, qui se traduira, grâce à la formule de Faà di Bruno. en une relation asymtotique des coefficients de $e^{\mathcal{P}(z)}$. Cette observation nous permet donc d'étendre à la fois le théorème 2.7.1 et le corollaire 2.7.2.

Corollaire 2.7.3 *Si $\mathcal{P}(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k$, $b_k \neq 0$ et $k \geq 0$, est un polynôme à coefficients réels, alors il suffit que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit satisfaite pour que l'on puisse obtenir une relation asymptotique pour les coefficients de $e^{\mathcal{P}(z)}$.*

(a) *Pour tout entier $d > 1$, il existe un entier m tel que d n'est pas un facteur de m et $b_m \neq 0$. De plus, si $m = m(d)$ est le plus grand tel entier, alors $b_{m(d)} > 0$ (même condition que 2.7.1 (c)).*

(b) *Il existe un entier $d > 1$ tel que si $d \nmid m$ alors $b_m = 0$, et la forme réduite de $\mathcal{P}(z)$ satisfait à la condition (a) ci-dessus.*

Démonstration. Évidente de 2.7.1, 2.7.2 et des remarques ci-dessus. □

Grâce aux théorèmes démontrés à la section 2.6, nous pouvons aisément déduire que les fonctions génératrices des nombres de Bell (1.3.2) et du nombre de fonctions idempotentes sur $[n]$ (1.3.3) sont H-admissible. En effet, comme nous avons déjà montré que e^x est H-admissible, le corollaire 2.6.5 nous assure que $e^x - 1$ est toujours H-admissible. Par le théorème 2.6.1, il suit que $\exp[e^x - 1]$ est aussi H-admissible. Également, xe^x est H-admissible par le théorème 2.6.3 et toujours par le théorème 2.6.1, $\exp[xe^x]$ est encore H-admissible. Les fonctions génératrices des exemples 1.3.2 et 1.3.3 sont donc toutes deux H-admissibles.

Pour terminer, mentionnons que l'utilité de la méthode de Hayman est souvent conditionnelle à notre capacité d'évaluer r_n, la solution de $a(r) = n$, avec suffisamment de précision pour estimer r_n^n et $f(r_n)$ asymptotiquement. Pour la fonction e^x, cette estimation était triviale. Dans d'autres cas, comme les nombres de Bell par exemple, l'estimation de r_n a posé des problèmes d'une très grande difficulté. Chaque application de la méthode de Hayman demandant un traitement particulier, nous n'élaborerons pas davantage sur ce sujet.

Chapitre III

Développement asymptotique complet de certaines fonctions holomorphes

3.1 Motivation

Comme les résultats de Hayman ont trouvé beaucoup d'applications en analyse combinatoire énumérative, il n'est pas surprenant que d'autres mathématiciens se soient intéressés à les généraliser. Une des voies possibles était de raffiner le développement asymptotique de Hayman dans le but d'obtenir une plus grande précision. C'est exactement ce que Harris et Schoenfeld ont fait en 1968.

Dans l'article intitulé "*Asymptotic Expansions for the Coefficients of Analytic Functions*" [4], ils définissent une classe de fonctions que nous appellerons HS-admissibles. plus restreinte que celle des fonctions H-admissibles, mais pour lesquelles ils obtiennent un développement qui est souvent asymptotique et complet. Par cela nous entendons que les coefficients a_n de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sont estimés par

$$a_n = C(n)\left\{1+\frac{F_1(n)}{\beta_n}+\cdots+\frac{F_N(n)}{\beta_n^N}+o\left[\frac{F_N(n)}{\beta_n^N}\right]\right\}, \quad \text{pour tout } N \geq 0,$$

lorsque $n \to \infty$, où $C(n)$ et $F_k(n)$ seront des fonctions de n à préciser et

$$\frac{F_{k+1}(n)}{\beta_n^{k+1}} = o\left[\frac{F_k(n)}{\beta_n^k}\right], \qquad \text{pour tout } k \geq 0,$$

où $\beta_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Remarquons que l'on retrouve un développement asymptotique simple (à la Hayman) en ne conservant que le premier terme $a_n \sim C_n$.

Nous consacrerons ce chapitre à l'étude de l'article de Odlyzko et Richmond [8] portant sur le lien existant entre les fonctions H-admissibles et les fonctions HS-admissibles. Ils ont en effet démontré que si $f(z)$ est H-admissible, alors la fonction $\exp[f(z)]$ sera HS-admissible. Nous obtiendrons donc un développement asymptotique complet[7] pour toutes les fonctions de ce type, et ce, au "prix" d'un développement simple.

3.2 Définition d'une fonction HS-admissible et résultat principal de Harris et Schoenfeld

Introduisons tout de suite la définition de fonction HS-admissible. Nous serons ensuite en mesure d'énoncer le résultat principal de Harris et Schoenfeld à propos de ces fonctions.

Définition 3.2.1 (HS-admissibilité) *Nous dirons d'une fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ holomorphe sur $|z| < R \leq \infty$ et réelle pour tout z réel qu'elle est* HS-admissible *si elle satisfait les conditions suivantes.*

A) Il existe $R_0 \in (0, R)$ et une fonction $d(r)$ définie pour tout $r \in (R_0, R)$ tel que nous aurons

$$0 < d(r) < 1 \quad et \quad r\{1 + d(r)\} < R.$$

De plus, $f(z) \neq 0$ pour tout z tel que $|z - r| < rd(r)$.

B) En définissant pour $k \geq 1$ les fonctions

$$A(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \qquad B_k(z) = \frac{x^k}{k!} A^{(k-1)}(z), \qquad B(z) = \frac{1}{2} B_1'(z),$$

nous avons

$$B(r) > 0 \quad pour\ R_0 < r < R \quad et \quad B_1(r) \to \infty \quad lorsque\ r \to R.$$

[7]Note: Voir les remarques à la fin de la section 3.2.

C) Pour R_1 assez près de R et n grand, définissons u_n comme l'unique solution de $B_1(r) = n+1$ telle que $R_1 < r < R$. Définissons également

$$C_j(z,r) = -\left\{ B_{j+2}(z) + \frac{(-1)^j}{j+2} B_1(r) \right\} \Big/ B(r),$$

et supposons qu'il existe un entier n_0 et des fonctions non négatives D_n, E_n telles que

$$|C_j(u_n,u_n)| \leq E_n D_n^j, \qquad \text{pour } n \geq n_0 \text{ et } j = 1,2,\ldots.$$

D) Lorsque $n \to \infty$,

$$B(u_n)d(u_n)^2 \to \infty\,, \qquad D_n E_n B(u_n) d(u_n)^3 \to 0\,, \qquad D_n d(u_n) \to 0.$$

Avant de poursuivre avec le résultat de Harris et Schoenfeld, procédons à quelques remarques au sujet de la définition de HS-admissibilité. Premièrement, la fonction $B_1(r)$ définie en (B) n'est autre que le $a(r)$ de Hayman (voir 2.2.1). L'unicité des u_n définis en (C) découle donc de ce fait. Deuxièmement, la fonction $B(r)$, bien que différente du $b(r)$ de Hayman, lui est quand même reliée d'assez près et nous exploiterons ce lien lors de la démonstration du résultat de Odlyzko et Richmond.

Théorème 3.2.2 (Harris et Schoenfeld [4]) *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une fonction HS-admissible et que β_n est définie par $\beta_n = B(u_n)$, alors pour tout $N \geq 0$ nous aurons*

$$a_n = \frac{f(u_n)}{2u_n^n\sqrt{\pi\beta_n}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{F_k(n)}{\beta_n^k} + O\left[\Phi_N(n,d)\right] \right\}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

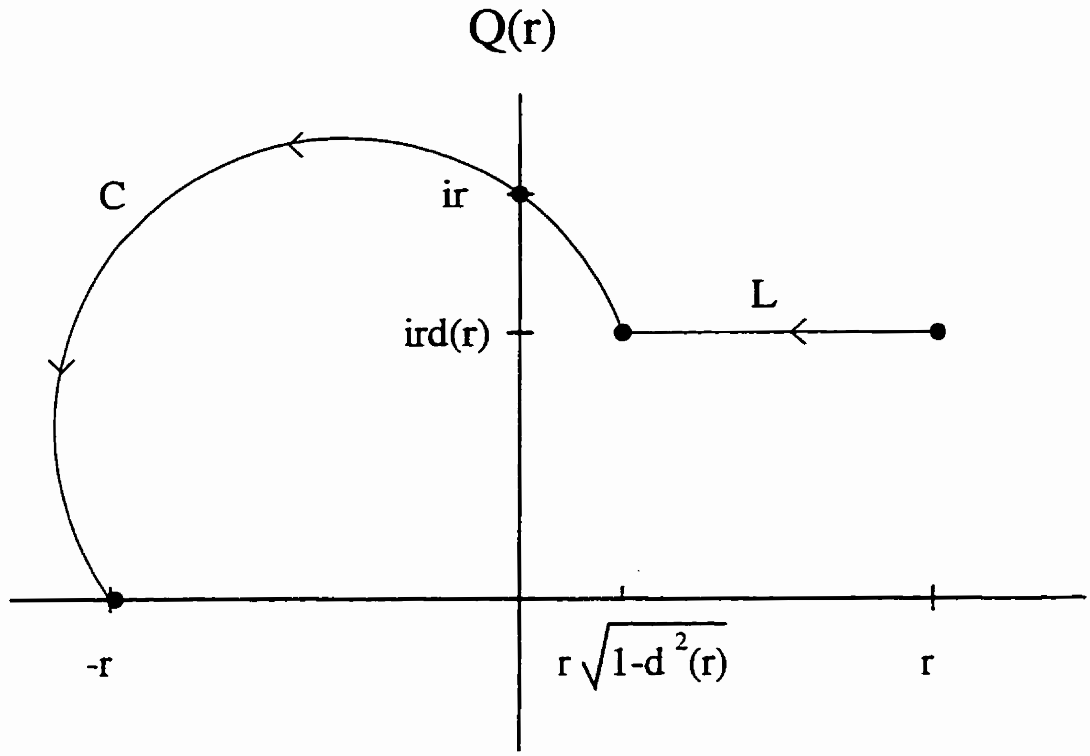
où

$$F_k(n) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{2k} \frac{\gamma(m+k+\frac{1}{2})}{m!} \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_m=2k \\ j_1,\ldots,j_m \geq 1}} \gamma_{j_1}(n)\cdots\gamma_{j_m}(n).$$

$$\gamma_j(n) = C_j(u_n,u_n),$$

et

$$\Phi_N(n,d) \;=\; \max\left[\mu(r,d),\; E_n'(D_n E_n'' \beta_n^{-\frac{1}{2}})^{2N+2}\right],$$



avec

$$\begin{aligned}
\mu(r,d) &= \max_{z \in Q(r)} \left[\lambda(r,d)\sqrt{B(r)},\ \frac{\exp\left[-B(r)d(r)^2\right]}{\sqrt{B(r)}d(r)}\right], \\
E_n' &= \min[1, E_n], \\
E_n'' &= \max[1, E_n],
\end{aligned}$$

où $\lambda(r,d)$ *est défini comme le maximum de* $\left|\frac{f(z)}{f(r)}\right|$ *pour les* z *sur le chemin orienté* $Q(r)$[8] *(voir la figure ci-dessus) constitué du segment de droite* L *de* $r + ird(r)$ *à* $r\sqrt{1-d^2(r)} + ird(r)$ *et de l'arc de cercle* C *du dernier point à* ir *à* $-r$. □

Remarquons que le théorème 3.2.2 ne nous assure pas d'un développement *asymptotique* complet. En effet, comme l'a fait remarquer Schmutz [11], si $\mathcal{P}(z) = z^4 - z^3 + z^2$, la fonction $e^{\mathcal{P}(z)}$ est bien HS-admissible mais le terme d'erreur $\Phi_N(n,d)$ est trop grand pour que 3.2.2 nous donne un développement asymptotique complet.

En 1985, Odlyzko et Richmond [8] ont toutefois établi une condition suffisante très simple pour qu'une fonction soit HS-admissible et que le développement fourni par

[8]Note: Dans l'article de Odlyzko et Richmond, il y a une erreur dans la définition du chemin $Q(r)$. Le bon chemin est celui défini au théorème 3.2.2.

le théorème 3.2.2 soit asymptotique. Leur découverte est d'autant plus intéressante que la vérification directe des conditions de HS-admissibilité est souvent ardue. Nous consacrerons donc la prochaine section à l'étude de leur résultat.

3.3 Exponentiation d'une fonction H-admissible et d'un polynôme

Cette section constitue le coeur du chapitre III. Nous y démontrerons le lien existant entre les fonctions H-admissibles et les fonctions HS-admissibles.

Théorème 3.3.1 (Odlyzko et Richmond [8]) *Si la fonction $f(z)$ est H-admissible alors* $\exp[f(z)]$ *est HS-admissible. De plus, pour tout $N > 0$ fixé, le terme d'erreur $\Phi_N(n, d)$ du théorème 3.2.2 est alors $o\left[\beta_n^{-N}\right]$ lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration. Supposons que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est H-admissible sur $|z| < R \leq \infty$. Soient $a(r)$, $b(r)$ définis pour $f(z)$ comme en 2.2.1 et $A(r)$, $B(r)$, $B_1(r)$ définis pour $F(z) = \exp[f(z)]$ comme en 3.2.1. Notons que $F(z)$ est holomorphe sur $|z| < R$ car elle résulte de la composition de deux fonctions holomorphes. De plus, comme $f(z)$ est réelle pour tout z réel, il en sera de même pour $F(z)$.

Montrons que $F(z)$ satisfait aux conditions (A), (B), (C) et (D) de la définition de HS-admissibilité.

Condition (A) Posons $d(r) = f(r)^{-2/5}$. Le lemme 2.4.3 nous assure que $d(r) \to 0$ lorsque $r \to R$. Si $R = \infty$, alors trivialement $r(1 + d(r)) < \infty$. Supposons que $R < \infty$. Du lemme 2.4.3, nous avons $a(r) = O\left[f(r)^{2/5}\right]$. Il suit que pour un r_1 assez grand,

$$f(r)^{-\frac{2}{5}} < \frac{K}{a(r)}, \qquad \text{pour } r_1 < r < R.$$

Par le lemme 2.4.1, nous savons qu'il existe également $r_2 < R$ tel que $(R-r)a(r) > KR$ pour tout r tel que $r_2 < r < R$, d'où l'inégalité

$$r < R - \frac{KR}{a(r)}, \qquad \text{pour } r_2 < r < R.$$

Du corollaire 2.3.2, nous savons que $b(r) > 0$ pour tout $r > q'$. Posons [9]

$$R_0 = \max[q', r_0, r_1, r_2].$$

Il suit que

$$\begin{aligned} r(1+d(r)) &= r + rf(r)^{-\frac{2}{5}}, \\ &< R - \frac{KR}{a(r)} + Rf(r)^{-\frac{2}{5}}, \\ &< R - \frac{KR}{a(r)} + \frac{KR}{a(r)} = R, \qquad \text{pour } R_0 < r < R. \end{aligned}$$

Finalement, comme $F(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, la condition (A) est vérifiée.

Condition (B) Pour vérifier (B), remarquons tout d'abord que comme $f(z)$ est H-admissible, par le théorème 2.6.1, $F(z) = \exp[f(z)]$ sera également H-admissible. Par les remarques faites au sujet de la définition 3.2.1, nous savons que $B_1(r)$ est exactement $a(r)$ défini pour $F(z)$. Il suit donc du corollaire 2.3.2 que $B_1(r) \to \infty$ lorsque $r \to R$.

En calculant, nous trouvons également que

$$B_1(r) = rf'(r) \quad \text{et} \quad B(r) = \frac{1}{2}(rf'(r) + r^2 f''(r)).$$

Vérifions que $B(r)$ est bien strictement positif pour tout r assez grand. Par définition de R_0, nous savons que $b(r) > 0$ pour $R_0 < r < R$. En exploitant la ressemblance entre $B(r)$ et $b(r)$, nous trouvons

$$\begin{aligned} 2\frac{B(r)}{f(r)} &= r\frac{f'(r)}{f(r)} + r^2\frac{f''(r)}{f(r)}, \\ &\geq r\frac{f'(r)}{f(r)} + r^2\frac{f''(r)}{f(r)} - r^2\left(\frac{f'(r)}{f(r)}\right)^2, \\ &= b(r) > 0, \qquad \text{pour } R_0 < r < R. \end{aligned}$$

D'où, par le théorème 2.2.1 (a), $B(r) \geq \frac{1}{2}f(r)b(r) > 0$ pour $R_0 < r < R$. Par le lemme 2.4.3 et le fait que $b(r) \to \infty$, nous avons même que $B(r) \to \infty$.

Condition (C) Par le théorème 2.5.2 (I), nous savons que $r^j f^{(j)}(r) = O\left[j! f(r) a(r)^j\right]$, où la constante du O est indépendante de j. Par la démonstration du théorème, nous

[9] Note: Ne pas confondre le r_0 défini pour $f(z)$ en 2.2.1 avec le R_0 défini pour $F(z)$ en 3.2.1. Aussi, r_0 jouera un rôle lors de la vérification de (B); c'est pourquoi nous en tenons compte dans la construction de R_0.

pouvons choisir cette constante inférieure à 2 pour tout r assez grand. Comme dans notre cas $A(r) = F'(r)/F(r) = f'(r)$, il suit que

$$\begin{aligned} B_j(r) &= \frac{r^j}{j!}A^{(j-1)}(r), \\ &= \frac{r^j}{j!}f^{(j)}(r), \\ &= O\left[f(r)a(r)^j\right], \end{aligned}$$

où la constante du O est toujours indépendante de j. Comme nous savons que $F(z)$ est H-admissible, et que $B_1(r) = a(r)$ défini pour $F(z)$, le corollaire 2.3.3 nous permet de déduire que $u_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. De cela, il suit que l'on peut choisir un n_0 assez grand pour que la constante du O estimant $B_j(u_n)$ soit inférieure à 2. Ceci dit, posons

$$E_n = \frac{2f(u_n)a(u_n)^2}{B(u_n)} \quad \text{et} \quad D_n = a(u_n).$$

Nous avons donc $E_n D_n^j = 2f(u_n)a(u_n)^{j+2}/B(u_n)$. Voyons si $|C_j(u_n, u_n)|$ est inférieur à $E_n D_n^j$ pour tout n assez grand.

$$\begin{aligned} |C_j(u_n, u_n)| &= \left|\frac{-\left\{B_{j+2}(u_n) + \frac{(-1)^j}{j+2}B_1(u_n)\right\}}{B(u_n)}\right|, \\ &= \left|\frac{-\left\{O\left[f(u_n)a(u_n)^{j+2}\right] + \frac{(-1)^j}{j+2}a(u_n)\right\}}{B(u_n)}\right|. \\ &\leq \frac{O\left[f(u_n)a(u_n)^{j+2}\right]}{B(u_n)}, \end{aligned}$$

où la constante du O est inférieure à 2 et $|C_j(u_n, u_n)| < 2f(u_n)a(u_n)^{j+2}/B(u_n)$ pour tout $n \geq n_0$. La condition (C) est donc vérifiée.

Condition (D) Notons que par le lemme 2.4.3, nous avons pour tout $\epsilon > 0$,

$$D_n = O\left[f(u_n)^\epsilon\right], \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Encore par le lemme 2.4.3, en choisissant $\epsilon < 2/5$, il existe une constante M positive telle que

$$\begin{aligned} D(u_n)d(u_n) &< Mf(u_n)^\epsilon d(u_n), \\ &= Mf(u_n)^{\epsilon - \frac{2}{5}} \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Par le théorème 2.5.2, nous avons que $u_n^k f^{(k)}(u_n) \sim f(u_n)a(u_n)$. Comme $B(r) = \frac{1}{2}\left(rf'(r) + r^2 f''(r)\right)$, nous aurons par le lemme 2.2.2,

$$\begin{aligned} B(u_n) &\sim \frac{1}{2}\left(u_n f'(u_n) + u_n^2 f''(u_n)\right), \\ &\sim \frac{1}{2}\left(f(u_n)a(u_n) + f(u_n)a(u_n)^2\right). \\ &\sim \frac{1}{2} f(u_n)a(u_n)^2. \end{aligned}$$

De cela, il suit que

$$E_n = \frac{2f(u_n)a(u_n)^2}{B(u_n)} \sim 4, \qquad \text{lorsque } n \to \infty,$$

et

$$\begin{aligned} B(u_n)d(u_n)^2 &\sim \frac{1}{2} f(u_n)a(u_n)^2 d(u_n)^2, \\ &= \frac{1}{2} f(u_n)^{\frac{1}{5}} a(u_n)^2 \to \infty, \qquad \text{lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Vérifions le comportement de $D_n E_n B(u_n)d(u_n)^3$ lorsque $n \to \infty$. Encore par le lemme 2.4.3, en choisissant $\epsilon < 1/5$,

$$\begin{aligned} D_n E_n B(u_n)d(u_n)^3 &\sim O\left[f(u_n)^\epsilon\right] \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} f(u_n)^{\frac{1}{5}} a(u_n)^2\right) \cdot \left(f(u_n)^{-\frac{2}{5}}\right). \\ &= O\left[f(u_n)^{\epsilon - \frac{1}{5}}\right] a(u_n)^2 \to 0, \end{aligned}$$

ce qui vérifie (D).

Nous venons de montrer que $F(z)$ est HS-admissible. Pour terminer la démonstration, il ne nous reste plus qu'à estimer le terme d'erreur $\Phi_N(n, d)$. Commençons par évaluer $\mu(u_n, d)$ en analysant de près l'expression $\lambda(u_n, d)\sqrt{B(u_n)}$. Pour les $z \in Q(u_n)$, nous savons que $|z| \geq u_n$ et en posant $z = re^{i\theta}$ nous aurons

$$\min_{z \in Q(u_n)} \arg(z) = \arctan\left(\frac{u_n d(u_n)}{u_n}\right) = d(u_n) + o\left[d(u_n)^2\right].$$

Pour les θ tels que $\theta \geq d(u_n)$, nous aurons, grâce au théorème 2.5.6,

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z)}{F(u_n)}\right| &= \exp\left[\mathrm{Re} f(z) - f(u_n)\right], \\ &\leq \exp[|f(z)| - f(u_n)], \\ &\leq \exp\left[f(u_n) - f(u_n)^{\frac{1}{7}} - f(u_n)\right], \\ &= \exp\left[-f(u_n)^{\frac{1}{7}}\right]. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.4.3, il existera une constante M telle que pour tout n assez grand.

$$\begin{aligned}
\beta_n^N \cdot \exp\left[-f(u_n)^{\frac{1}{7}}\right]\sqrt{B(u_n)} &\sim \left(\frac{1}{2}\right)^{N+\frac{1}{2}} f(u_n)^{N+\frac{1}{2}} a(u_n)^{2N+1} \exp\left[-f(u_n)^{\frac{1}{7}}\right], \\
&< M f(u_n)^{N+1} \exp\left[-f(u_n)^{\frac{1}{7}}\right], \\
&\to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

D'où, pour les $z \in Q(u_n)$ tels que $\arg(z) \geq d(u_n)$, nous avons

$$\lambda(u_n, d)\sqrt{B(u_n)} = o\left[\beta_n^{-N}\right].$$

Pour être complètement rigoureux, il nous reste cependant un détail à vérifier. En effet, comme le terme d'erreur sur θ est négatif[10], nous devons aussi considérer le cas où $\theta < d(u_n)$. Comme $\min\limits_{z \in Q(u_n)} \arg(z) \sim d(u_n)$, nous pouvons borner inférieurement θ par $\frac{1}{2} f(u_n)^{-2/5}$ pour tout n assez grand. Remarquons également que par le théorème 2.5.2 et le lemme 2.2.2, pour tout n suffisamment grand, $u_n f'(u_n) + u_n^2 f''(u_n) > \frac{1}{2} f(u_n) a(u_n)^2$. Comme par le lemme 2.4.3, nous aurons

$$a(u_n) < f(u_n)^{2/5} \quad \text{et} \quad \exp\left[f(u_n)^{-1/5} a(u_n)^3\right] < 2,$$

pour des n assez grands, nous pourrons donc utiliser toute la précision du lemme 2.5.4 afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z)}{F(u_n)}\right| &= \exp\left[\mathrm{Re} f(z) - f(u_n)\right], \\
&= \exp\left[f(u_n) - \frac{1}{2}\theta^2\left(u_n f'(u_n) + u_n^2 f''(u_n)\right) + \mathrm{Re}\, O\left[\theta^3 f(u_n) a(u_n)^3\right] - f(u_n)\right], \\
&< \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} f(u_n)^{-\frac{4}{5}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} f(u_n) a(u_n)^2\right) + f(u_n)^{-\frac{6}{5}} f(u_n) a(u_n)^3\right], \\
&= \exp\left[-\frac{1}{16} f(u_n)^{\frac{1}{5}} a(u_n)^2 + f(u_n)^{-\frac{1}{5}} a(u_n)^3\right], \\
&< 2\exp\left[-\frac{1}{16} f(u_n)^{\frac{1}{5}} a(u_n)^2\right].
\end{aligned}$$

Encore par le lemme 2.4.3, il existe une constante M telle que pour tout n suffisamment grand,

[10]Note: Cela se vérifie a l'aide du développement limité de $\arctan x$ autour de 0. En effet, $\arctan x = x - x^3/3 + o[x^4]$ lorsque $x \to 0$.

$$\begin{aligned}
\beta_n^N \cdot \left|\frac{F(z)}{F(u_n)}\right| \sqrt{B(u_n)} & \\
\sim & \left(\frac{1}{2}\right)^{N+\frac{1}{2}} f(u_n)^{N+\frac{1}{2}} a(u_n)^{2N+1} 2 \exp\left[-\frac{1}{16} f(u_n)^{\frac{1}{5}} a(u_n)^2\right]. \\
< & \; M f(u_n)^{N+1} \exp\left[-\frac{1}{16} f(u_n)^{\frac{1}{5}} a(u_n)^2\right], \\
\to & \; 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty,
\end{aligned}$$

et ici aussi, $\lambda(u_n, d)\sqrt{B(u_n)} = o\left[\beta_n^{-N}\right]$.

Montrons maintenant que $\frac{\exp\left[-B(u_n)d(u_n)^2\right]}{\sqrt{B(u_n)}d(u_n)} = o\left[\beta_n^{-N}\right]$. Pour simplifier les manipulations, posons $c_n = B(u_n)d(u_n)^2$. Comme $c_n \sim \frac{1}{2} f(u_n)^{1/5} a(u_n)^2$, nous aurons donc

$$\begin{aligned}
\beta_n^N \cdot \frac{\exp\left[-B(u_n)d(u_n)^2\right]}{\sqrt{B(u_n)}d(u_n)} &= \frac{B(u_n)^N}{\sqrt{c_n}\left[1 + c_n + \cdots + \frac{c_n^N}{N!} + \cdots\right]}, \\
&= \frac{B(u_n)^N}{\sqrt{c_n} B(u_n)^N d(u_n)^{2N}\left[o(1) + \frac{1}{N!} + \frac{c_n}{(N+1)!} \cdots\right]}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{B(u_n)} d(u_n)^{2N+1}\left[o(1) + \frac{1}{N!} + \frac{c_n}{(N+1)!} \cdots\right]}, \\
&< \frac{(5N+2)!}{\sqrt{B(u_n)} d(u_n)^{2N+1} c_n^{2(2N+1)}}, \\
&\sim \frac{(5N+2)!\, 2^{2(2N+1)}}{\sqrt{B(u_n)} f(u_n)^{-\frac{2(2N+1)}{5}} \cdot f(u_n)^{\frac{2(2N+1)}{5}} a(u_n)^{4(2N+1)}}, \\
&= \frac{(5N+2)!\, 2^{2(2N+1)}}{\sqrt{B(u_n)} a(u_n)^{4(2N+1)}} \to 0, \qquad \text{lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

d'où $\frac{\exp\left[-B(u_n)d(u_n)^2\right]}{\sqrt{B(u_n)}d(u_n)} = o\left[\beta_n^{-N}\right]$.

Comme $\mu(u_n, d)$ est assez petit, il ne reste qu'à montrer que $E_n'\left(D_n E_n'' \beta_n^{-\frac{1}{2}}\right)^{2N+2}$ est bien $o\left[\beta_n^{-N}\right]$. Par définition de E_n' et E_n'', nous devons considérer les deux possibilités suivantes.

Supposons d'abord que $E_n' = 1$ et $E_n'' = E_n$. En laissant tendre $n \to \infty$ nous avons

$$E_n \sim 4, \quad D_n = O\left[f(u_n)^\epsilon\right] \quad \text{et} \quad B(u_n) \sim \frac{1}{2} f(u_n) a(u_n)^2.$$

Comme $\beta_n = B(u_n)$, en choisissant $\epsilon < \frac{1}{2(N+1)}$, il existera une constante M telle que pour pour tout n assez grand nous aurons

$$\begin{aligned}
\Phi_N(n,d) &= \left(D_n E_n \beta_n^{-\frac{1}{2}}\right)^{2N+2}, \\
&\sim \left(O\left[f(u_n)^{\epsilon}\right]\cdot 4\right)^{2N+2}\cdot \beta_n^{-N-1}, \\
&\leq \frac{M f(u_n)^{2\epsilon(N+1)}}{B(u_n)}\beta_n^{-N}, \\
&\sim \frac{2M f(u_n)^{2\epsilon(N+1)}}{f(u_n)a(u_n)^2}\beta_n^{-N}, \\
&= o(1)\beta^{-N}.
\end{aligned}$$

D'où $\Phi_N(n,d) = o\left[\beta_n^{-N}\right]$.

Supposons maintenant que $E_n' = E_n$ et que $E_n'' = 1$. Dans ce cas, avec les mêmes hypothèses que ci-dessus, nous aurons

$$\begin{aligned}
\Phi_N(n,d) &= E_n\left(D_n \beta_n^{-\frac{1}{2}}\right)^{2N+2}, \\
&\sim 4\cdot O\left[f(u_n)^{\epsilon}\right]^{2N+2}\cdot \beta_n^{-N-1}, \\
&\leq \frac{M f(u_n)^{2\epsilon(N+1)}}{B(u_n)}\beta_n^{-N}, \\
&\sim \frac{2M f(u_n)^{2\epsilon(N+1)}}{f(u_n)a(u_n)^2}\beta_n^{-N}, \\
&= o(1)\beta_n^{-N},
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve et montre que $\Phi_N(n,d) = o\left[\beta_n^{-N}\right]$ lorsque $n \to \infty$. □

Remarquons que le théorème 3.3.1 ne s'applique pas dans le cas où la fonction $f(z)$ est un polynôme. les polynômes n'étant pas en général des fonctions H-admissibles. Par contre, Schmutz [11] réussit à obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que le théorème 3.2.2 nous donne un développement asymptotique de $e^{\mathcal{P}(z)}$. Pour compléter cette section, citons ici son résultat.

Théorème 3.3.2 (Schmutz [11]) *Soit $\mathcal{P}(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k$, $b_k \neq 0$ et $k \geq 1$, un polynôme à coefficients réels, et soit $F(z) = e^{\mathcal{P}(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Alors*

$$a_n = \frac{F(u_n)}{2u_n^n\sqrt{\pi\beta_n}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{N}\frac{F_k(n)}{\beta_n^k} + O\left[\Phi_N(n,d)\right]\right\}, \qquad \textit{lorsque } n \to \infty,$$

est un développement asymptotique complet pour a_n si et seulement si les conditions équivalentes [11] *de Hayman ci-dessous sont satisfaites.*

(a) *Pour tout entier $d > 1$, il existe un entier m tel que d n'est pas un facteur de m et $b_m \neq 0$. De plus, si $m = m(d)$ est le plus grand tel entier, alors $b_{m(d)} > 0$ (même condition que 2.7.1 (c)).*

(b) *$a_n > 0$ pour tout entier n suffisamment grand (même condition que 2.7.1 (e)).*

Du théorème 3.3.2, Schmutz déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.3 (Schmutz [11]) *Si $\mathcal{P}(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k$, $b_k \neq 0$ et $k \geq 1$, est un polynôme à coefficients réels non négatifs, alors nous pouvons obtenir un développement asymptotique complet pour les coefficients de $e^{\mathcal{P}(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

Démonstration. La preuve utilise le même argument que le corollaire 2.7.2. Si $\mathcal{P}(z)$ satisfait à la condition (a) du théorème 3.3.2, alors il suffit de l'appliquer pour obtenir le résultat. Sinon, comme tous les coefficients b_m sont non négatifs, c'est qu'il existe un entier $d > 1$ tel que $\mathcal{P}(z) = Q(z^d)$. Dans ce cas, $Q(z)$ (la forme réduite de $\mathcal{P}(z)$) satisfera à 3.3.2 (a) et nous pourrons obtenir un développement asymptotique complet pour les coefficients a'_n de la fonction $F(z) = e^{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \frac{z^n}{n!}$. À l'aide de la formule de Faà di Bruno, nous trouvons finalement que $a_n = 0$ si $d \nmid n$ et que si $n = ds$ pour un $s \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a'_s}{s!(d!)^s}, \\ &= \frac{F(u_n)}{2s!(d!)^s u_n^n \sqrt{\pi \beta_n}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{F_k(n)}{\beta_n^k} + O\left[\Phi_N(n,d)\right] \right\}, \qquad \text{lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

où $F(z) = e^{Q(z)}$ et les $u_n, \beta_n, F_k(n)$ et $\Phi_N(n,d)$ sont calculés pour $F(z)$. □

Notons qu'en employant le même argument que pour le corollaire 2.7.3 nous pouvons également étendre le corollaire 3.3.3 au cas où $\mathcal{P}(z)$ possède certains coefficients négatifs. Nous obtenons ainsi l'analogue du corollaire 2.7.3.

Corollaire 3.3.4 *Si $\mathcal{P}(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k$, $b_k \neq 0$ et $k \geq 1$, est un polynôme à coefficients réels, alors il suffit que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit satisfaite pour que l'on puisse obtenir un développement asymptotique complet pour les coefficients de $e^{\mathcal{P}(z)}$.*

[11] Note: Voir le théorème 2.7.1 de Hayman.

(a) *Pour tout entier $d > 1$, il existe un entier m tel que d n'est pas un facteur de m et $b_m \neq 0$. De plus, si $m = m(d)$ est le plus grand tel entier, alors $b_{m(d)} > 0$ (même condition que 2.7.1 (c)).*

(b) *Il existe un entier $d > 1$ tel que si $d \not| m$ alors $b_m = 0$, et la forme réduite de $\mathcal{P}(z)$ satisfait à la condition (a) ci-dessus.*

Démonstration. Si $\mathcal{P}(z)$ vérifie la condition (a), il suffit d'appliquer le théorème 3.3.2. Si $\mathcal{P}(z)$ vérifie la condition (b), nous n'avons qu'à appliquer le théorème 3.3.2 à la forme réduite de $\mathcal{P}(z)$ et ensuite utiliser la formule de Faà di Bruno pour retrouver le développement de $e^{\mathcal{P}(z)}$ à la manière du corollaire 3.3.3. □

Soulignons que ce dernier résultat et le corollaire 2.7.3 découlent des mêmes hypothèses. Il n'est donc pas plus "difficile" d'obtenir un développement asymptotique complet qu'un développement simple dans le cas de la fonction $e^{\mathcal{P}(z)}$, ce qui n'est évidemment pas le cas en général.

Pour terminer, remarquons que les nombres de Bell et le nombre de fonctions idempotentes sur $[n]$ peuvent être approximés par le théorème 3.3.1 car $e^x - 1$ et xe^x sont deux fonctions H-admissibles[12]. Notons toutefois qu'à l'instar de la méthode de Hayman, l'utilité du théorème 3.3.1 dépend grandement de notre capacité à estimer u_n avec assez de précision pour estimer asymptotiquement à leur tour les fonctions u_n^n, $f(u_n)$ et β_n.

[12]Note: Voir la discussion suivant le corollaire 2.7.3.

Chapitre IV

Autres méthodes analytiques utiles

Dans ce dernier chapitre, nous ferons un survol de quelques autres méthodes analytiques couramment utilisées en analyse combinatoire énumérative. Nous dégagerons leurs forces et leurs faiblesses et donnerons quelques applications typiques. Notre ambition n'est pas de toutes les exposer avec rigueur mais seulement d'informer le lecteur de leur existence et de le référer aux ouvrages appropriés. À la section 4.2.1. nous procéderons à un bref rappel des définitions et résultats de l'analyse complexe dont nous ferons usage par la suite. Ce rappel ne se veut en aucun cas exhaustif ou rigoureux et n'a pour but que d'introduire les concepts utiles en analyse combinatoire. Le lecteur intéressé peut consulter [6] ou tout autre livre portant sur l'analyse complexe.

4.1 Estimés élémentaires

L'expression "élémentaire" signifie que nous ne considérerons dans cette section que les méthodes n'ayant pas recours à l'analyse complexe. Le plus grand avantage des méthodes élémentaires est qu'elles sont souvent plus faciles à utiliser. De plus, comme elles imposent des conditions plus faibles sur les fonctions génératrices, elles sont plus largement applicables.

Leur plus grand inconvénient est que les estimés qu'elles procurent sont souvent moins précis que ceux obtenus à l'aide des méthodes d'analyse complexe. Par exemple, considérons les fonctions suivantes.

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

et

$$f_2(z) = \frac{3}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} = \frac{3}{2} + 2\frac{z^2}{(1-z^2)}.$$

Ces deux séries convergent pour $|z| < 1$, divergent pour $|z| > 1$ et tendent vers l'infini lorsque $z \to 1^-$. Toutefois,

$$f_1(z) - f_2(z) = \frac{z-1}{2(z+1)} \to 0, \qquad \text{lorsque } z \to 1^-.$$

Ces deux fonctions sont donc presque identiques près de $z = 1$. De plus, comme $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont toutes deux asymptotiques à $1/(1-z)$ lorsque $z \to 1^-$, $z \in I\!R^+$, et que leur différence est $O(|z-1|)$ pour $z \in I\!R^+$, il nous faudrait des outils extrêmement subtils afin de détecter des différences dans leurs coefficients simplement grâce à leur comportement sur l'axe réel positif. Cependant, comme $f_1(z)$ et $f_2(z)$ diffèrent notablement lorsque $z \to -1^+$, il subsiste toujours un espoir pour les méthodes réelles.

Considérons maintenant la fonction

$$f_3(z) = 2 + 3\sum_{n=1}^{\infty} z^{3n} = 2 + 2\frac{z^3}{1-z^3}.$$

Dans ce cas, $f_1(z)$ et $f_3(z)$ sont toujours asymptotiques à $1/(1-z)$ lorsque $z \to 1^-$, $z \in I\!R^+$, mais ici,

$$|f_1(z) - f_3(z)| = O(|z-1|), \qquad \text{pour tout } z \in I\!R.$$

Cette différence entre $f_1(z)$, $f_2(z)$ et $f_1(z)$, $f_3(z)$ est comparable au changement que produirait la modification d'un seul coefficient d'une fonction génératrice F. Avec des méthodes réelles, il nous faudrait beaucoup plus d'information au sujet de la fonction génératrice afin de déterminer comment cette modification influence les coefficients de F. Nous verrons plus tard que les méthodes d'analyse complexe sont plus appropriées à ce genre de problème. En imposant à F des conditions assez faibles sur $\mathbb{C}$, elles peuvent se contenter de beaucoup moins d'information le long de l'axe réel.

Cela dit, voici une façon triviale d'obtenir une borne supérieure pour les coefficients de $f(z)$.

Lemme 4.1.1 *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Supposons que $f(z)$ est analytique sur $|z| < R$. $R > 0$, et que $a_n \geq 0$ pour tout n. Alors, pour tout $x \in (0, R)$ et tout $n \geq 0$.*

$$a_n \leq \frac{f(x)}{x^n}.$$

Remarquons que pour les fonctions génératrices associées à des problèmes d'énumération, l'obligation que tous les a_n soient positifs ne constitue pas une restriction majeure. Notons que si $R \leq 1$, le lemme 4.1.1 nous permet d'obtenir une borne supérieure pour la somme des coefficients car

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x^n} &\geq \frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n, \\ &\geq \sum_{j=0}^{n} a_j. \end{aligned}$$

Aussi, une meilleure borne peut souvent être obtenue à l'aide du lemme 4.1.1 en minimisant $f(x)/x^n$. Par exemple, si $f(z) = e^z$, nous aurons

$$\frac{1}{n!} = [z^n]f(z) \leq \frac{e^x}{x^n}, \qquad \text{pour tout } x \in (0, \infty).$$

Trouvons le $x_n \in (0, \infty)$ minimisant e^x/x^n. En prenant le logarithme et en dérivant nous trouvons

$$\frac{d}{dx}\left(\log\left(\frac{e^x}{x^n}\right)\right) = \frac{d}{dx}(x - n\log x) = 1 - \frac{n}{x}.$$

En posant la dérivée égale à zéro, il suit que $x_n = n$. Ainsi, pour $n!$, nous obtenons

$$n! \geq n^n e^{-n}.$$

Cette borne tient uniformément pour tout n et n'est éloignée de la formule de Stirling[12] que d'un facteur asymptotique $\sqrt{2\pi n}$. Habituellement, lorsque la fonction $f(z)$ est assez lisse, la meilleure borne fournie par le lemme 4.1.1 ne sera trop grande que d'un facteur polynômial en n, et souvent d'aussi peu que d'un facteur $\sqrt{n}$.

Mentionnons qu'il est également possible d'obtenir des bornes inférieures pour les coefficients d'une grande classe de fonctions à coefficients positifs (voir Odlyzko [7a]). Par contre, ces bornes sont généralement plus faibles que les bornes supérieures obtenues à l'aide du lemme 4.1.1 et nécessitent l'estimation précise du minimum de $f(x)/x^n$.

---

[12]Note: Voir l'exemple suivant le théorème 2.3.1.

De nombreux théorèmes taubériens peuvent également s'avérer utiles dans l'étude des fonctions génératrices. La plupart d'entre eux s'appliquent à des fonctions possédant de petites singularités[13] et donnent des relations asymptotiques pour la somme de leurs coefficients. Pour une discussion plus approfondie, nous référons le lecteur à la section 8.2 de [7b].

4.2 Méthodes basées sur l'analyse complexe

Dans cette section, nous introduirons quelques méthodes utilisant l'analyse complexe. Celles-ci s'inspirent en grande partie de la formule de Cauchy. Lorsqu'elles s'appliquent, elles donnent généralement beaucoup plus de précision que les méthodes élémentaires. Par exemple, nous avons vu à la section précédente que les fonctions

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{et} \qquad f_3(z) = 2 + 3\sum_{n=1}^{\infty} z^{3n} = 2 + 2\frac{z^3}{1-z^3}$$

sont très semblables sur l'axe réel. La situation est pourtant toute autre dans le plan complexe. En effet, $f_1(z)$ n'a qu'un seul pôle simple en $z = 1$ alors que $f_3(z)$ possède un pôle simple en chaque racine cubique de l'unité, c'est-à-dire en $z = 1, z = \exp(2\pi i/3)$ et $z = \exp(4\pi i/3)$. Notons que la présence des trois pôles aux racines cubiques de l'unité est reflétée par la périodicité modulo 3 des coefficients de $f_3(z)$. Dans la discussion qui suivra, $f(z)$ sera une fonction d'une variable complexe.

4.2.1 Définitions et résultats généraux

Par un théorème bien connu (voir [6] chapitre III, §7 théorème 7.3), $f(z)$ sera *holomorphe* sur un ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ si et seulement si $f(z)$ admet un développement en série de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n, \qquad \text{où les } a_n \text{ dépendent de } w,$$

dans un voisinage de chaque point $w \in \mathcal{U}$ avec un rayon de convergence strictement positif. La plupart des fonctions pour lesquelles des méthodes analytiques s'appliquent sont effectivement holomorphes dans un certain disque centré à l'origine. Rappelons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ soit holomorphe dans un voisinage de l'origine est qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|a_n| \leq C^n$

[13] Note: Voir la section 4.2.1 pour une "classification" des singularités.

pour tout $n \geq 0$. En pratique, nous aurons donc affaire à deux types de fonctions génératrices: celles qui sont holomorphes dans un voisinage de l'origine et celles qui divergent pour tout $z \neq 0$.

Nous dirons qu'une fonction $f(z)$ est *méromorphe* sur un ouvert $\mathcal{U}$ si elle est holomorphe sur l'ouvert $\mathcal{U}'$ obtenu à partir de $\mathcal{U}$ auquel on a enlevé un ensemble de points isolés $\{p_1, p_2, \ldots\}$ où chaque p_i est un pôle de $f(z)$. Si $f(z)$ possède un pôle d'ordre r en $z = w$, alors nous pouvons développer $f(z)$ en série de Laurent de la forme

$$f(z) = \sum_{n=-r}^{\infty} a_n (z-w)^n, \qquad \text{où } a_n \text{ dépend de } w,$$

et nous noterons la *partie principale* de $f(z)$ en w par

$$PP(f, w) = \sum_{n=-r}^{-1} a_n (z-w)^n.$$

Rappelons également que toute fonction méromorphe peut s'écrire comme le quotient de deux fonctions holomorphes.

Le concept de prolongement analytique sera également très utile. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$. Si $g(z)$ est holomorphe sur $\mathcal{U}' \supset \mathcal{U}$ et $g(z) = f(z)$ pour tout $z \in \mathcal{U}$, nous dirons que $g(z)$ est le *prolongement analytique* de $f(z)$ à l'ensemble $\mathcal{U}'$. Notons que lorsque $\mathcal{U}'$ est connexe, si $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ est non vide, le prolongement analytique est unique. Par exemple, la série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge sur $|z| < 1$ et définit une fonction holomorphe sur cet ensemble. Par ailleurs, $g(z) = 1/(1-z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $g(z) = f(z)$ sur $|z| < 1$. La fonction $g(z)$ est donc le prolongement analytique de $f(z)$ à l'ensemble $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Pour terminer cette section, parlons un peu des différents types de singularités auxquelles nous serons confrontés. Les singularités isolées qui ne sont pas des pôles seront appelées *singularités essentielles*. Pour une fonction $f(z)$ donnée, celles-ci correspondent aux points $w \in \mathbb{C}$ autour desquels le développement en série de Laurent autour de w possède un nombre infini de puissances négatives de $(z-w)$. Ainsi le point $w = 1$ est une singularité essentielle de $\exp[1/(1-z)]$ mais non de $1/(1-z)$.

Mentionnons également un autre type de singularité: la singularité algébrique. Celle-ci provient du fait que pour définir convenablement $\log(z)$, et par conséquent[14] z^α,

[14]Note: Rappelons que $z^\alpha = \exp[\alpha \log(z)]$.

pour α réel, il nous faut choisir une "branche" sur laquelle la fonction $\log(z)$ ne sera pas définie. Par exemple, on choisit habituellement la branche principale $\mathbb{R}^-$ pour définir $\log(z)$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. D'une façon générale, une fonction $f(z)$ aura une singularité algébrique en $z = w$ si l'on peut réécrire $f(z)$ comme la somme d'une fonction holomorphe en $z = w$ et d'un nombre fini de termes de la forme

$$\left(1 - \frac{z}{w}\right)^{\alpha} g(z),$$

où $g(z)$ est holomorphe en w et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Comme nous l'avions remarqué à la section 2.1, le succès d'une méthode analytique dans l'estimation asymptotique des coefficients d'une fonction génératrice $f(z)$ dépend grandement du type de singularité de $f(z)$. Pour une fonction $f(z)$ entière, c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$, les méthodes développées aux chapitres II et III sont souvent appropriées. Dans les autres cas, il nous faudra déterminer si les singularités de $f(z)$ sont *petites* ou *grandes*. Cette classification est assez vague et ne sert qu'à indiquer à quelle vitesse croît la fonction $f(z)$ lorsque $z \to w$, où w est une singularité de $f(z)$. Si $w = 1$, nous dirons que les fonctions $(1-z)^{1/2}$, $\log(1-z)$ et $(1-z)^{-10}$ ont une petite singularité en w car $|f(z)|$ décroît ou croît au plus comme une puissance négative de $|1-z|$ lorsque $z \to 1$. Par contre, les fonctions $\exp[1/(1-z)]$ et $\exp[(1-z)^{-1/5}]$ possèdent une grande singularité en w.

Énonçons maintenant quelques résultats généraux en commençant par le pendant complexe du lemme 4.1.1.

Lemme 4.2.1 *Si $f(z)$ est holomorphe sur $|z| < R$, $R > 0$, alors pour tout r tel que $0 < r < R$ et $n \geq 0$,*

$$|[z^n]f(z)| \leq \frac{\max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{r^n}.$$

Ce lemme est une conséquence directe de la formule de Cauchy. Notons que si $f(z)$ est définie comme en 4.1.1 avec $a_n \geq 0$ pour tout n, le lemme 4.1.1 devient un corollaire évident de 4.2.1 car

$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n = f(|z|).$$

L'avantage du lemme 4.2.1 sur son vis-à-vis réel est que les coefficients a_n peuvent maintenant prendre des valeurs négatives (et même complexes!). Notons que si $f(z)$ est holomorphe sur $|z| < R$, alors pour tout $\epsilon > 0$, $f(z)$ sera bornée sur $|z| < R - \epsilon$ et par le lemme 4.2.1,

$$|a_n| = O\left[(R-\epsilon)^{-n}\right].$$

Un autre théorème de base à propos du rayon de convergence R d'une série peut également nous renseigner sur le comportement des coefficients de $f(z)$.

Théorème 4.2.2 *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Alors une des trois possibilités suivantes doit être vérifiée.*

(a) $f(z)$ converge seulement pour $z = 0$, et $R = 0$.

(b) $f(z)$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, et $R = \infty$.

(c) Il existe un nombre $R \in (0, \infty)$ tel que $f(z)$ converge absolument sur $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$. De plus, R est donné par l'expression

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}, \qquad \textit{(convention: } \tfrac{1}{0} = \infty \textit{ et } \tfrac{1}{\infty} = 0).$$

Appliquons le théorème 4.2.2 à la fonction génératrice des nombres de Bernoulli.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Les singularités de $f(z)$ sont situées aux points $z = 2k\pi i$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Notons que la singularité en $z = 0$ est enlevable en définissant $f(0) = 1$, et que les singularités (non enlevables) les plus près de l'origine sont $\pm 2\pi i$. Le rayon de convergence de $f(z)$ est donc 2π. Par le théorème 4.2.2,

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{2\pi},$$

ce qui nous assure qu'étant donné $\epsilon > 0$, nous avons, pour tout n assez grand,

$$|a_n| < \left(\frac{1}{2\pi} + \epsilon\right)^n$$

et pour une infinité de n,

$$|a_n| > \left(\frac{1}{2\pi} - \epsilon\right)^n.$$

Il suit que les coefficients a_n tendent vers zéro exponentiellement rapidement, environ comme $1/(2\pi)^n$ pour n assez grand.

4.2.2 Soustraction de singularités et méthode de Darboux

Une façon classique d'évaluer les coefficients d'une fonction génératrice $f(z)$ est de construire une fonction $g(z)$ plus simple ayant certaines, voire les mêmes singularités que $f(z)$, et d'évaluer les coefficients de $g(z)$.

Supposons que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R > 0$ et que sur le cercle $|z| = R$, les seules singularités de $f(z)$ soient des pôles. En construisant une fonction $g(z)$ holomorphe sur $|z| < R$ et ayant les mêmes singularités que $f(z)$ sur $|z| = R$, la différence $f(z) - g(z)$ sera maintenant holomorphe sur $|z| < R'$ avec $R' > R$. Avec un peu de chance, R' sera substantiellement plus grand que R. Par le théorème 4.2.2, nous aurons pour tout $\epsilon > 0$,

$$|[z^n]\, f(z) - g(z)| = O\left[(R' - \epsilon)^{-n}\right], \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Si nous connaissons précisément les coefficients de la fonction $g(z)$, nous aurons donc un bon estimé de ceux de $f(z)$.

À nouveau, appliquons cette idée à la fonction génératrice des nombres de Bernoulli,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Nous savons que $f(z)$ possède des pôles simples en $2k\pi i$, $k \neq 0$ (en 0, la singularité est enlevable). Posons

$$\begin{aligned} g(z) &= 2\pi i \left(\frac{1}{z - 2\pi i} - \frac{1}{z + 2\pi i}\right), \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2\pi i}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z}{2\pi i}\right)^n. \end{aligned}$$

La fonction $(f - g)(z)$ est maintenant holomorphe sur $|z| < 4\pi$ et par le théorème 4.2.2,

$$|[z^n]\, f(z) - g(z)| = O\left[(4\pi - \epsilon)^{-n}\right].$$

Comme les coefficients de $g(z)$ sont donnés par

$$[z^n]\, g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \dfrac{2}{(2\pi)^n} & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

nous avons, pour les coefficients de $f(z)$,

$$a_n = [z^n] f(z) = \begin{cases} O\left[(4\pi - \epsilon)^{-n}\right] & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \dfrac{2}{(2\pi)^n} + O\left[(4\pi - \epsilon)^{-n}\right] & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Le principe de soustraction de singularités a donné naissance à bien des méthodes pour étudier les coefficients de fonctions génératrices, entre autres au théorème suivant.

Théorème 4.2.3 *Supposons que $f(z)$ est méromorphe sur un ouvert contenant $|z| \leq R$, holomorphe en $z = 0$ et sur $|z| = R$, et que les seuls pôles de $f(z)$ dans $|z| < R$ sont $p_1, p_2, \ldots, p_k$, respectivement d'ordre $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Supposons de plus que*

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \leq M,$$

et que $R - |p_i| \geq \delta$ pour un certain $\delta > 0$ et $1 \leq i \leq k$. Alors

$$\left|[z^n]f(z) - \sum_{i=1}^{k} PP(f, p_i)\right| \leq \frac{M}{R^n} + \frac{1}{R^n}\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{|a_j(p_i)|}{\delta^j}\right),$$

où les $a_j(p_i)$ dépendent des pôles et sont définis de la façon suivante

$$a_j(p_i) = [(z - p_i)^{-j}]PP(f, p_i).$$

Démonstration. Comme $\left(f(z) - \sum_{i=1}^{k} PP(f, p_i)\right)$ est holomorphe sur un ouvert contenant $|z| \leq R$, nous pouvons appliquer le théorème 4.2.2 afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \left|[z^n]\left(f(z) - \sum_{i=1}^{k} PP(f, p_i)\right)\right| &\leq \frac{1}{R^n}\max_{|z|=R}\left|f(z) - \sum_{i=1}^{k} PP(f, p_i)\right|, \\ &\leq \frac{1}{R^n}\left(M + \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{|a_j(p_i)|}{\delta^j}\right)\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Quand la fonction $f(z)$ présente des singularités algébriques, la méthode de Darboux est souvent utilisée. Nous citerons ici une généralisation due à Szegö [12].

Théorème 4.2.4 *Supposons que $f(z)$ est holomorphe sur $|z| < R$, $R > 0$, et ne possède que des singularités algébriques sur $|z| = R$, disons aux points w_j, $j = 1, \ldots, k$. La fonction $f(z)$ peut alors s'écrire comme*

$$f(z) = h(z) + \sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{z}{w_j}\right)^{\alpha_j} g_j(z),$$

où $h(z)$ est holomorphe sur $|z| < R$, $g_j(z)$ est holomorphe sur un voisinage de w_j et $\alpha_j \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Soient a le minimum de $Re(\alpha_j)$ et $S = \{j \in \{1, \ldots, k\} : Re(\alpha_j) = a\}$. Alors, lorsque $n \to \infty$,

$$[z^n]f(z) = \sum_{j \in S} \frac{g_j(w_j)n^{-\alpha_j - 1}}{\Gamma(-\alpha_j)w_j^n} + o\left[R^{-n}n^{-a-1}\right].$$

Appliquons le théorème 4.2.4 à la fonction génératrice exponentielle que nous avons obtenue pour les graphes 2-réguliers à la section 1.3.4. Ici,

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}}}{\sqrt{1-z}},$$

$R = 1$ et la seule singularité algébrique de $f(z)$ se trouve en $z = 1$. Nous aurons donc

$$\begin{aligned} [z^n]f(z) &= \frac{e^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}n^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + o\left[\sqrt{n}\right], \\ &= \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{n\pi}} + o\left[\sqrt{n}\right]. \end{aligned}$$

Nous verrons dans la prochaine section une famille de résultats pouvant souvent remplacer avantageusement la méthode de Darboux.

4.2.3 Théorèmes de transfert

Les théorèmes de transfert constituent un apport assez récent au "coffre à outils" de l'analyse combinatoire. Ils permettent de traduire directement le développement asymptotique d'une fonction génératrice en développement asymptotique pour ses coefficients. Ces résultats sont également fondés sur le principe de soustraction de singularités mais ils l'utilisent assez différemment pour justifier leur exposition dans une section à part. La méthode de base que nous présenterons s'appliquera aux fonctions génératrices ayant une seule singularité sur l'axe réel mais pouvant être étendues d'une certaine façon au-delà de leur rayon de convergence.

Nous nous contenterons ici d'énoncer un théorème résumant la plupart des résultats obtenus à l'aide des techniques de transfert. Nous référons le lecteur à l'article de Flajolet et Odlyzko [3] pour les démonstrations ainsi qu'une discussion plus approfondie du sujet. Mais tout d'abord, nous devons définir la notion de fonction à variation lente à l'infini ainsi que le domaine fermé $\Delta(r, \phi, \eta)$.

Définition 4.2.5 ([7b], p.1166) *Une fonction $L(u)$ est dite* à variation lente à l'infini *s'il existe*

(a) des nombres réels $u_0 > 0$ et $0 < \phi_0 < \pi/2$ tels que $L(u)$ est holomorphe et non nulle sur

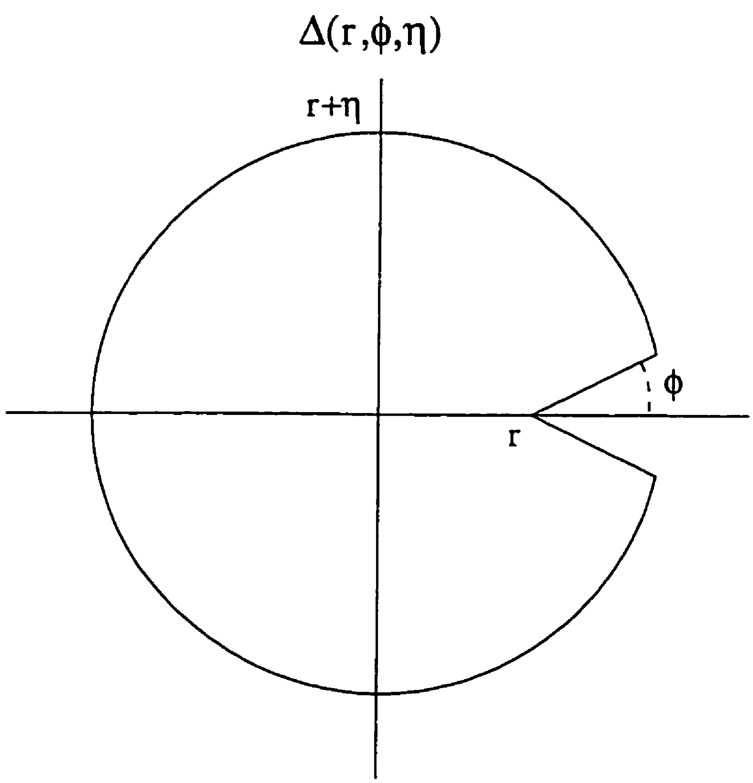
$$\{u : |\arg(u - u_0)| \leq \pi - \phi_0\};$$

(b) une fonction $\epsilon(x)$ définie pour $x \geq 0$ avec $\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0$ telle que pour tout $\theta \in [-(\pi - \phi_0), \pi - \phi_0]$ et $u \geq u_0$, nous avons

$$\left|\frac{L\left(ue^{i\theta}\right)}{L(u)} - 1\right| < \epsilon(u) \quad et \quad \left|\frac{L(u \log\log u)}{L(u)} - 1\right| < \epsilon(u).$$

Le domaine fermé $\Delta = \Delta(r, \phi, \eta)$ (voir la figure ci-dessous) est défini par

$$\Delta(r, \phi, \eta) = \{z : |z| \leq r + \eta, |\arg(z - r)| \geq \phi\}.$$



Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre théorème de transfert.

Théorème 4.2.6 ([7b], p.1166) *Supposons que $f(z)$ est holomorphe*[15] *sur $\Delta\backslash\{r\}$. où $\Delta = \Delta(r, \phi, \eta)$ avec $r, \eta > 0$, $0 < \phi < \pi/2$, et que $L(u)$ est une fonction à croissance lente à l'infini. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(A) Si

$$f(z) = O\left[(z-r)^{\alpha} L\left(\frac{1}{r-z}\right)\right]$$

uniformément lorsque $z \to r$ pour $z \in \Delta\backslash\{r\}$, alors

$$[z^n]f(z) = O\left[r^{-n} n^{-\alpha-1} L(n)\right], \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

(B) Si

$$f(z) = o\left[(z-r)^{\alpha} L\left(\frac{1}{r-z}\right)\right]$$

uniformément lorsque $z \to r$ pour $z \in \Delta\backslash\{r\}$, alors

$$[z^n]f(z) = o\left[r^{-n} n^{-\alpha-1} L(n)\right], \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

(C) Si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, 2, \ldots\}$ et

$$f(z) \sim (z-r)^{\alpha} L\left(\frac{1}{r-z}\right)$$

uniformément lorsque $z \to r$ pour $z \in \Delta\backslash\{r\}$, alors

$$[z^n]f(z) \sim \frac{r^{-n} n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} L(n).$$

Notons que ce théorème peut être généralisé. En effet, la méthode de transfert s'applique également à une fonction $f(z)$ possédant un nombre fini de singularités sur son cercle de convergence. Il suffit dans ce cas de modifier le domaine Δ en y enlevant une "pointe" pour chaque singularité supplémentaire. L'important, c'est que la fonction $f(z)$ soit continue sur le nouveau domaine ainsi obtenu.

Pour une fonction $f(z)$ ne possédant qu'une singularité réelle en $z = r$, la condition que $f(z)$ soit holomorphe sur $\Delta(r, \phi, \eta)$ est plus difficile à assouplir. Toutefois, si la singularité est assez grande, Flajolet et Odlyzko [3] ont démontré qu'il était suffisant que $f(z)$ soit holomorphe sur $|z| < r$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

[15]Note: Nous dirons que $f(z)$ est holomorphe sur $\Delta\backslash\{r\}$ si $f(z)$ est holomorphe sur un voisinage de chaque point $w \in \Delta\backslash\{r\}$.

Théorème 4.2.7 *Supposons que $f(z)$ est holomorphe sur $\{z : |z| \leq r, z \neq r\}$ et que $L(u)$ est une fonction à croissance lente à l'infini. Si $\alpha \in (-\infty, -1)$, alors les parties (A), (B) et (C) du théorème 4.2.6 sont vraies.*

Avant d'utiliser la méthode de transfert, il est utile de connaître le développement asymptotique de certaines fonctions usuelles. Dans l'exemple qui suivra, nous aurons besoin de connaître les coefficients de la fonction $(1 - z)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, \ldots\}$. Ceux-ci sont donnés par

$$[z^n](1-z)^\alpha \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left[1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(3\alpha+1)}{24n^2} + \frac{\alpha^2(\alpha+1)^2(\alpha+2)(\alpha+3)}{28n^3} + \cdots\right],$$

et plus exactement par le lemme suivant.

Lemme 4.2.8 ([3], Proposition 1) *Les coefficients binomiaux exprimant*

$$[z^n](1-z)^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, \ldots\},$$

sont donnés exactement et asymptotiquement par

$$[z^n](1-z)^\alpha = \binom{n-\alpha-1}{n} = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1)},$$

et

$$[z^n](1-z)^\alpha \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left[1 + \sum_{k\geq 1} \frac{e_k^{(\alpha)}}{n^k}\right].$$

où les $e_k^{(\alpha)}$ sont donnés par la somme

$$e_k^{(\alpha)} = \sum_{l=k}^{2k} (-1)^l \lambda_{k,l}(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+l),$$

avec

$$\sum_{k,l\geq 0} \lambda_{k,l}\nu^k t^l = e^t(1+\nu t)^{-1-\frac{1}{\nu}}.$$

Ce lemme est démontré dans [3] comme un des théorèmes de transfert de base. Il nous permettra maintenant d'étudier une fonction génératrice qui nous est familière:

celle des graphes 2-réguliers[16]. Nous avons

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{1-z}},$$

et en développant $f(z)$ autour du point $z = 1$, nous trouvons

$$f(z) = e^{-\frac{3}{4}} \left\{ (1-z)^{-\frac{1}{2}} + (1-z)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(1-z)^{\frac{3}{2}} + \cdots \right\}.$$

Par le lemme 4.2.8, nous avons

$$\begin{aligned}
[z^n](1-z)^{-\frac{1}{2}} &\sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left[1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \cdots \right], \\
[z^n](1-z)^{\frac{1}{2}} &\sim \frac{-1}{\sqrt{n\pi}2n} \left[1 + \frac{3}{8n} + \frac{25}{128n^2} + \cdots \right]. \\
[z^n](1-z)^{\frac{3}{2}} &\sim \frac{3}{\sqrt{n\pi}4n^2} \left[1 + \frac{15}{8n} + \frac{385}{128n^2} + \cdots \right].
\end{aligned}$$

En rassemblant les termes de même puissance en n, nous avons donc pour les coefficients de $f(z)$

$$[z^n]f(z) \sim \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{n\pi}} \left\{ 1 - \frac{5}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \cdots \right\}.$$

Rappelons que dans l'exemple ci-dessus, nous avons obtenu un développement asymptotique complet pour les coefficients de $f(z)$. Cette heureuse performance est due au caractère particulier de la fonction $f(z)$. Elle est en effet de la forme

$$\text{fonction entière} \times (1-z)^{\alpha}, \qquad \text{pour } \alpha \in I\!\!R \setminus \{0, 1, \ldots\}.$$

En d'autres cas, elle se compare quand même avantageusemant à la méthode de Darboux (lorsque celle-ci s'applique), avec des estimations plus précises d'environ un facteur $\sqrt{n}$ et parfois plus. En oubliant le développement complet de $[z^n]f(z)$, on voit par exemple que

$$[z^n]f(z) = \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{n\pi}} + O[n^{-1}],$$

alors que la méthode de Darboux nous donnait (voir la section 4.2.2) seulement

$$[z^n]f(z) = \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{n\pi}} + o\left[\sqrt{n}\right].$$

[16]Note: Voir la section 1.3.4 pour la dérivation de cette fonction génératrice.

Même si les théorèmes de transfert sont souvent plus puissants et d'application plus variée que la méthode de Darboux, cette dernière n'est pas à reléguer aux oubliettes pour autant. Les théorèmes de transfert nécessitent que l'on puisse prolonger analytiquement la fonction $f(z)$ en dehors d'un certain secteur au-delà de son rayon de convergence. Si $f(z)$ possède une frontière naturelle, aucun théorème de transfert ne peut s'appliquer et l'on doit avoir recours au bon vieux Darboux ou à d'autres méthodes plus complexes (des théorèmes taubériens par exemple).

Bibliographie

[1] Comtet L., *Advanced Combinatorics*, D. Reidel Publishing Company, 1974.

[2] Erdélyi A., *Asymptotic Expansions*, Dover Publications Inc., New York, 1956.

[3] Flajolet P. et Odlyzko A. M., *Singularity analysis of generating function*. SIAM J. Discrete Math., **3**(1990), 216-240.

[4] Harris B. et Schoenfeld L., *Asymptotic Expansions for the Coefficients of Analytics Functions*, Illinois J. Math **12**(1968), 264-277.

[5] Hayman W. K., *A generalisation of Stirling's formula*, J. Reine Angew. Math., **196**(1956) 67-95.

[6] Lang S., *Complex Analysis* (troisième édition), Springer-Verlag, 1993.

[7a] Odlyzko A. M., *Explicit Tauberian estimates for functions with positive coefficients*. J. Compt. Appl. Math., **41**, 187-197.

[7b] Odlyzko A. M., *Asymptotic enumeration methods*, in: R. L. Graham, M. Grötschel and L. Lovász, eds., Handbook of Combinatorics, Vol. 2 (North-Holland, Amsterdam), 1995, 1063-1229.

[8] Odlyzko A. M. et Richmond L. B., *Asymptotic expansions for the coefficients of analytic generating functions*, Aequationes Math., **28**(1985), 50-63.

[9] Rota G. C., *Studies in Combinatorics*, The Mathematical Association of America, 1978.

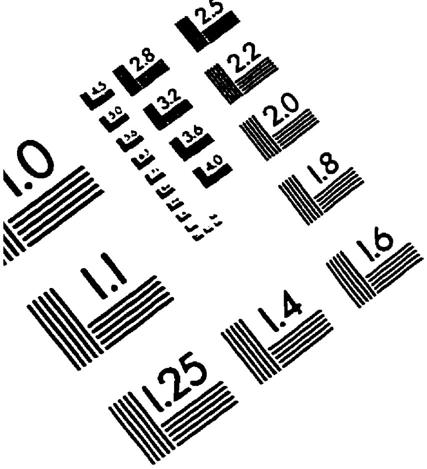
[10] Sachkov V. N., *Combinatorial Methods in Discrete Mathematics*, Cambridge University Press, 1996.

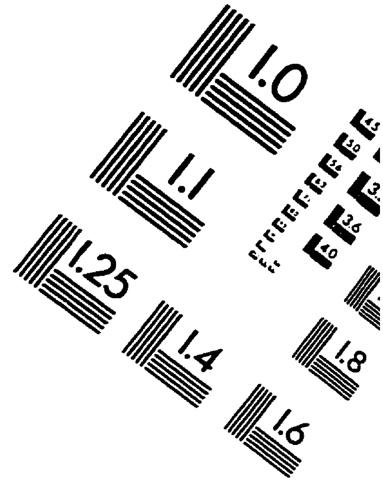
[11] Schmutz E., *Asymptotic Expansion for the Coefficients of* $e^{P(z)}$, Bull. London Math. Soc., **21**(1989), 482-486.

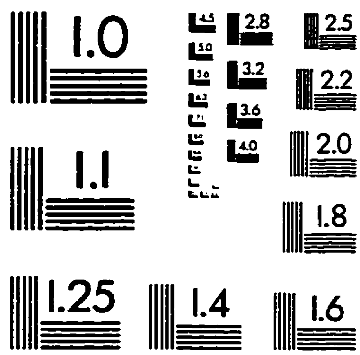
[12] Szegö G., *Orthogonal Polynomials*, édition révisée, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **23**, 1959.

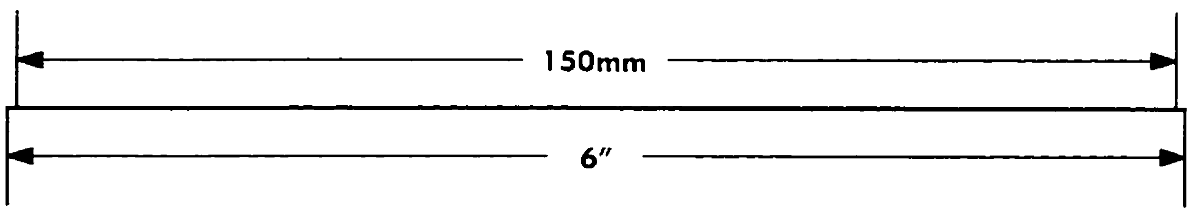
[13] Wilf H. S., *Generatingfunctionology*, Boston ; Toronto : Academic Press. 1990.

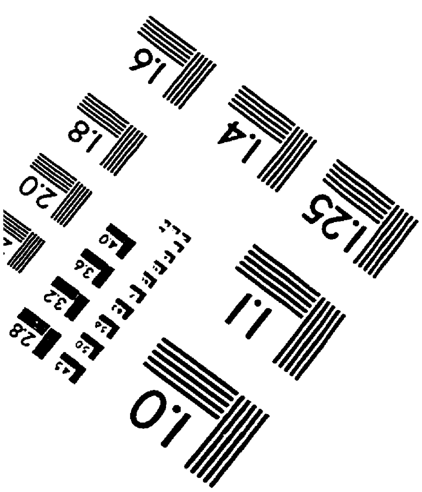
TEST TARGET (QA-3)

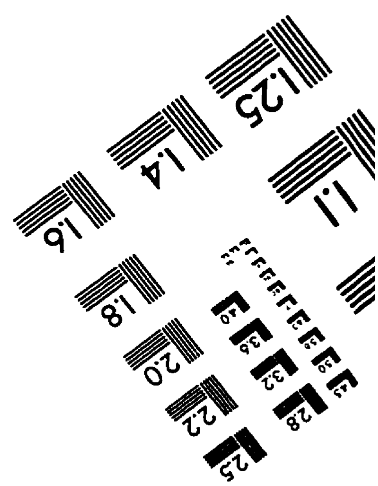












APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989