Julie Jacques

#### METHODES D'ESTIMATION DE LA FONCTION DE DEPENDANCE DES COPULES DE VALEURS EXTREMES.

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de mathématiques et de statistique FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE UNIVERSITÉ LAVAL

FEVRIER 1998

© Julie Jacques, 1998



#### National Library of Canada

Acquisitions and Bibliographic Services

395 Wellington Street Ottawa ON K1A 0N4 Canada Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions et services bibliographiques

395, rue Wellington Ottawa ON K1A 0N4 Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a nonexclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission. L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26221-9



### Résumé

Pour comprendre le comportement des valeurs extrêmes, il est nécessaire de s'intéresser à leur modélisation. Lorsque les valeurs extrêmes sont unidimensionnelles, l'ensemble de leurs lois possède une structure paramétrique. Par contre, lorsque les valeurs extrêmes sont bidimensionnelles, l'ensemble des lois ne possède pas de structure paramétrique. Ces lois sont caractérisées par leurs marginales et par une fonction appelée fonction de dépendance de la loi bivariée des valeurs extrêmes. Plusieurs méthodes paramétriques et non paramétriques ont été proposées pour estimer cette fonction. Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à trois de ces méthodes non paramétriques. Nous comparerons ces estimateurs grâce à différentes simulations qui seront effectuées ainsi qu'à l'analyse d'un ensemble de données.

### Remerciements

C'est avec un immense plaisir que je désire exprimer ma gratitude à mon directeur de recherche, le professeur Philippe Capéraà qui, grâce à sa patience, son encouragement, sa disponibilité et ses nombreuses connaissances, m'a permis de réaliser ce mémoire. Je tiens aussi à le remercier du financement qu'il m'a fourni par l'intermédiaire de subventions octroyées par le fonds FCAR du Québec.

Je voudrais souligner la précieuse collaboration de madame Anne-Laure Fougères, maître de conférence à l'Université Paul-Sabatier de Toulouse, en particulier pour les nombreux conseils ainsi que pour les programmes informatiques qu'elle a bien voulu mettre à ma disposition.

Je désire également remercier madame Louise Rémillard, de l'Alcan, ainsi que monsieur Luc Perreault, de l'INRS, qui m'ont fourni et autorisé à utiliser des données de l'Alcan.

Enfin qu'il me soit permis d'avoir une pensée pour les membres de ma famille, mes amis, et plus particulièrement mon conjoint François, qui ont su m'encourager tout au long de ce projet.

# Table des matières

1	Int	roduction	1
2	Lois de valeurs extrêmes		
	2.1	Cas univarié	4
	2.2	Cas bivarié	6
3	Est	timation de la fonction de dépendance	13
	3.1	Méthode d'estimation de Capéraà, Fougères et Genest	15
	3.2	Méthode du seuil de Khoudraji	22
	3.3	Méthode d'estimation de Joe, Smith et Weissman	24
4	Co	mparaison des estimateurs	26
	4.1	Copules Archimax	27
	4.2	Choix des estimateurs	29
		4.2.1 Estimateur de Capéraà, Fougères et Genest	29
		4.2.2 Méthode de Khoudraji	30

		4.2.3	Méthode de Joe, Smith et Weissman	31
	4.3	Analy	se de variance	32
		4.3.1	Analyse 1	33
		4.3.2	Analyse 2	39
5	An	alyse o	le données	45
	5.1	Estima ports :	ation par la méthode de Capéraà, Fougères et Genest sur les ap- naturels maximums des bassins de l'Alcan	47
	5.2	Estim des ap	ation par les méthodes de Joe et al. et de Khoudraji sur l'ensemble ports naturels journaliers des bassins de l'Alcan	50
		5.2.1	Estimateur de Joe et al	51
		5.2.2	Estimateur de Khoudraji	53
		5.2.3	Résultats sur l'ensemble des apports naturels journaliers	54
6	Co	nclusio	)n.	60

#### Bibliographie

62

iv

# Liste des annexes

A	Diagrammes en boîte pour l'analyse 1	65
в	Graphiques des estimations de la fonction de dépendance pour l'ana- lyse 1	74
С	Diagrammes en boîte pour l'analyse 2	83
D	Graphiques des estimations de la fonction de dépendance pour l'ana- lyse 2	90
Е	Cartes représentant les réservoirs Chute du Diable et Lac St-Jean	97
F	Programmes informatiques de fortran 77 utilisés pour l'analyse 1	100
G	Programmes informatiques de fortran 77 utilisés pour l'analyse 2	112
H	Programmes informatiques de fortran 77 utilisés pour l'analyse de données	121

# Liste des figures

Couples de loi bivariée ainsi que le couple de maxima sur les 2 compo- santes	7
Graphique de la fonction de dépendance $A$ de la copule de Gumbel de type $B$ pour $r = 1.5$ .	11
Graphique de la fonction de dépendance A de la copule de Galambos pour $\theta = 1.5.$ $\dots$	11
Graphique de la fonction de dépendance A de la copule de Cuadras-Augé généralisée pour $\theta = 0.25$ et $\beta = 0.25$	12
Graphique des 200 valeurs i $T_{[i]}$ (99) pour un certain échantillon	32
Estimation de la fonction de dépendance A calculée sur l'ensemble des maxima par la méthode de Capéraà et al	49
Graphiques des valeurs $iT_{[i]}(99)$ calculées pour les échantillons 1, 2, 3 et 4	52
Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de l'échantillon 1 d'apports naturels journaliers, par l'estimateur de Joe et al. et les esti- mateurs de Khoudraji.	54
	Couples de loi bivariée ainsi que le couple de maxima sur les 2 compo- santes

5.4	Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de l'échantillon	
	2 d'apports naturels journaliers, par l'estimateur de Joe et al. et les esti-	
	mateurs de Khoudraji	55
5.5	Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de l'échantillon	
	3 d'apports naturels journaliers, par l'estimateur de Joe et al. et les esti-	
	mateurs de Khoudraji	55
5.6	Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de l'échantillon	
	4 d'apports naturels journaliers, par l'estimateur de Joe et al. et les esti-	
	mateurs de Khoudraji.	56

## Liste des tableaux

4.1	Valeurs du paramètre $\alpha$ des générateurs $\phi_{1,\alpha}$ et $\phi_{2,\alpha}$ , et valeurs du tau de Kendall pour les copules Archimax correspondantes.	35
4.2	Comparaisons multiples des sept estimateurs de la fonction de dépendance A pour différentes copules Archimax, et pour $\log \hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*} $	37
4.3	Comparaisons multiples des sept estimateurs de la fonction de dépendance A pour différentes copules Archimax, à partir de $log(L_1)$	38
4.4	Valeurs des paramètres de la copule de Gumbel, $A_r^*$ , et de la copule asymétrique de Tawn, $A_{\alpha,\beta,r}^*$ , pour obtenir les différentes forces de dépen- dance	40
4.5	Comparaisons multiples des cinq estimateurs de la fonction de dépendance $A^*$ de différentes copules de valeurs extrêmes, pour différentes tailles d'échantillon N et pour $\log \hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*} $ .	41
4.6	Comparaisons multiples de cinq estimateurs de la fonction de dépendance $A^*$ de différentes copules de valeurs extrêmes, pour différentes tailles d'échantillon N et pour $log(L_1)$	43
5.1	Valeurs $\bar{n}$ du nombre représentant les 8% plus grandes pseudo-observa- tions $T_i(\beta)$ , ainsi que les valeurs $\hat{n}$ du nombre d'observations conservées pour le calcul de la moyenne tronquée, et ce pour chaque taille d'échan- tillon n.	51

5.2	Valeurs du tau de Kendall $\tau$ calculé entre les $W_i$ et les $R_i$ , du niveau de signification observé à pour le test $H_i$ , $\tau = 0$ avec $\alpha = 0.05$ , ginsi que	
	du nombre n <sup>**</sup> de $W_i$ tel que $R_i > nr$ , pour chacun des 4 échantillons.	53
5.3	Valeurs du tau de Kendall obtenues pour les différentes estimations de	
	la fonction de dépendance effectuées à partir de l'échantillon 1 pour les	
	méthodes de Joe et al. et de Khoudraji	57
5.4	Valeurs du tau de Kendall obtenues pour les différentes estimations de	
	la fonction de dépendance effectuées à partir de l'échantillon 2 pour les	
	méthodes de Joe et al. et de Khoudraji	57
5.5	Valeurs du tau de Kendall obtenues pour les différentes estimations de	
	la fonction de dépendance effectuées à partir de l'échantillon 3 pour les	
	méthodes de Joe et al. et de Khoudraji	57
5.6	Valeurs du tau de Kendall obtenues pour les différentes estimations de	
	la fonction de dépendance effectuées à partir de l'échantillon 4 pour les	
	méthodes de Joe et al. et de Khoudraji.	58

## Chapitre 1

#### Introduction

Dans plusieurs domaines, tels l'hydrologie, l'étude de problèmes environnementaux, la fiabilité, etc., les événements auxquels on s'intéresse font intervenir des observations extrêmes, que ce soit des maxima ou des minima. Par exemple, lors de la construction d'un barrage hydroélectrique sur une rivière, il est nécessaire de s'intéresser à la hauteur maximale que peut atteindre le cours d'eau. De la même façon, lorsqu'on étudie la fiabilité de certains appareils, les observations sur les pièces les plus fragiles sont des données très importantes. Cependant, dans de nombreux cas, les données sont multidimensionnelles et les évènements extrêmes d'intérêt montrent certaines formes de dépendance qu'il est utile de pouvoir modéliser. Ces données peuvent être, soit directement des maxima ou des minima, soit des données multidimensionnelles dont on cherche à modéliser la loi des valeurs extrêmes correspondantes. Nous limiterons ici notre étude au cas bivarié.

Lorsque les observations sont unidimensionnelles, la loi des valeurs extrêmes est complètement définie par trois paramètres réels. Par contre, dans le cas bivarié, la loi conjointe des extrêmes est caractérisée par les lois marginales et par une fonction convexe, définie sur [0, 1], appelée fonction de dépendance de la loi bivariée des valeurs extrêmes. Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'estimation de cette fonction de dépendance. Certains ont utilisé une démarche basée sur différentes approches paramétriques, par exemple Tawn (1988), Tiago de Oliveira (1984), etc. D'autres auteurs ont proposé des estimateurs de la fonction de dépendance qui s'appuient sur une démarche non paramétrique. Citons par exemple Pickands (1981), Joe, Smith et Weissman (1992), Khoudraji (1995), ainsi que Capéraà, Fougères et Genest (1997a).

Le principal objectif de ce travail est de comparer certaines méthodes d'estimation non paramétriques de la fonction de dépendance, ainsi que leurs comportements pour de petits échantillons.

Après avoir présenté la loi des valeurs extrêmes ainsi que quelques résultats pour le cas univarié et bivarié au chapitre 2, nous exposerons au chapitre 3 quelques estimateurs non paramétriques de la fonction de dépendance. Le premier, qui est conçu pour des observations extrêmes, est une extension de celui de Capéraà et al. (1997a) au cas où les marges de la loi de ces observations ne sont pas connues. Les deux autres estimateurs considérés dans notre étude sont ceux de Khoudraji (1995) et de Joe et al. (1992). Au chapitre 4, nous aborderons deux analyses différentes pour comparer ces méthodes d'estimation. Dans un premier temps, nous comparerons les propriétés de ces estimateurs calculés à partir d'échantillons de lois bivariées. Dans un deuxième temps, ces comparaisons seront effectuées sur les mêmes estimateurs mais ceux-ci seront calculés à partir d'échantillons de valeurs extrêmes. Dans le dernier chapitre, nous appliquerons ces estimateurs à des données concernant des réservoirs d'eau utilisés pour la production d'électricité nécessaire à l'entreprise Alcan, et nous en comparerons les résultats.

## Chapitre 2

#### Lois de valeurs extrêmes

Dans plusieurs domaines d'application, il est nécessaire de s'intéresser à la notion de valeurs extrêmes. La théorie des valeurs extrêmes a pour objet la modélisation et l'étude de problèmes où les observations sont des valeurs maximums ou minimums d'un certain échantillon. Il existe dans le cas univarié une vaste littérature sur le sujet. On peut citer par exemple les tous premiers travaux effectués par L. von Bortkiewicz (1922) et R. von Mises (1923). Ce sujet fut également étudié par Fisher et Tippett (1928) qui établirent les trois lois limites des valeurs extrêmes, et par R.von Mises (1954) qui proposa la notion de domaine d'attraction.

Contrairement au cas univarié, les travaux effectués dans le cas bivarié sont nettement moins nombreux. Parmi les auteurs qui se sont intéressés au cas bivarié, on peut citer Tiago de Oliveira (1984), Pickands (1981), Deheuvels (1984), Resnick (1987) et Galambos (1987).

Cette section est consacrée à la présentation de la loi des valeurs extrêmes ainsi que de quelques résultats classiques. Dans un premier temps, nous présenterons le cas univarié pour ensuite étendre ces définitions au cas bivarié.

#### 2.1 Cas univarié

Considérons un échantillon  $X_1, ... X_n$  d'une loi F définie sur R, et posons

$$Z_n = max(X_1, \dots, X_n),$$

c'est-à-dire  $Z_n$  est la plus grande observation de l'échantillon. S'il existe deux suites de réels  $a_n > 0$  et  $b_n$  telles que

$$\lim_{n \to \infty} P(\frac{Z_n - b_n}{a_n} \le x) = \lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n) = M(x), \tag{2.1}$$

où M est une fonction de répartition qui n'est pas dégénérée, on dit que M est une loi des valeurs extrêmes du maximum.

Si une fonction de répartition G est telle qu'il existe deux constantes  $\alpha > 0$  et  $\beta$  telles que  $G(x) = M(\alpha x + \beta)$ , on dit que G est du même type que M.

Fisher et Tippett ont montré en 1928 que la fonction de répartition d'une loi des valeurs extrêmes associées au maximum appartenait à l'un des trois types suivants:

$$\Lambda(x) = exp\{-exp(-x)\}, \quad -\infty < x < \infty,$$
  

$$\Phi_a(x) = exp(-x^{-a}), \quad x > 0, \quad a > 0,$$
  

$$\Psi_a(x) = exp\{-(-x)^a\}, \quad x \le 0, \quad a > 0.$$
(2.2)

Ces lois sont appelées respectivement, loi de Gumbel, loi de Fréchet et loi de Weibull standards.  $\Phi_1(x)$  et  $\Psi_1(x)$  sont les lois unités de Fréchet et de Weibull respectivement. Notons que si M n'est pas sous une de ces trois formes, aucune constante  $a_n$  et  $b_n$  ne satisfont (2.1).

Ces trois types de lois peuvent se mettre sous la forme d'une famille paramétrique appelée famille des distributions des valeurs extrêmes généralisées de von Mises (1954) définie par

$$M(x;\mu,\sigma,k) = exp[-\{1-k(x-\mu)/\sigma\}^{1/k}],$$

où  $\sigma > 0$ ,  $\mu, k \in \mathbb{R}$  et pour tout x tel que  $1 - k(x - \mu)/\sigma > 0$ . Ainsi, lorsque k tend vers zéro, nous retrouvons une loi de Gumbel, pour k positif, nous avons une loi de Weibull et enfin, pour k négatif, une loi de Fréchet.

On peut définir de façon similaire la loi des valeurs extrêmes du minimum; si

$$W_n = \min(X_1, ..., X_n).$$

est la plus petite observation de l'échantillon et s'il existe deux suites de réels  $a_n > 0$ et  $b_n$  telles que

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{W_n-b_n}{a_n}\leq x)=\lim_{n\to\infty}\left\{1-F(a_nx+b_n)\right\}^n=L(x),$$

où L est une fonction de répartition qui n'est pas dégénérée, on dit que L est une loi des valeurs extrêmes du minimum. Dans ce cas, L est de l'un des trois types suivants:

$$\Lambda^{*}(x) = 1 - exp\{-exp(x)\}, \quad -\infty < x < \infty,$$
  

$$\Phi^{*}_{a}(x) = 1 - exp\{-(-x)^{-a}\}, \quad x < 0, \quad a > 0,$$
  

$$\Psi^{*}_{a}(x) = 1 - exp(-x^{a}), \quad x \ge 0, \quad a > 0.$$
(2.3)

Ce résultat s'obtient aisément en remarquant que la loi du minimum d'un échantillon d'une loi F se déduit de la loi du maximum d'un échantillon de la loi symétrique de F par rapport à l'origine. Notons encore qu'une loi quelconque de (2.2) et (2.3) peut s'obtenir à partir d'une des autres par une simple transformation de la variable aléatoire X. Par exemple, si X suit la loi de Gumbel standard  $\Lambda$ , alors Y = exp(-X) suit la loi exponentielle  $\Psi_1^*$ .

L'existence des constantes  $a_n$  et  $b_n$  dans la définition d'une loi des valeurs extrêmes repose en fait sur des propriétés vérifiées par la loi F. Des conditions nécessaires et suffisantes sur F ont été obtenues pour l'existence de la loi limite M (voir par exemple Galambos, 1987, pp. 53-54 et 75-76). Lorsque cette limite existe, on dit alors que la loi F est dans le domaine d'attraction de M ou que M est l'attracteur de F.

**Exemple 2.1:** Soit  $X_1, ..., X_n$  un échantillon d'une loi F continue. Considérons les variables aléatoires  $Y_i = 1/\{1 - F(X_i)\}, i = 1, ..., n$ . Soit G la fonction de répartition définie par

$$G(x) = P(Y_i \le x) = \begin{cases} 0 & si \ x < 1 \\ \\ 1 - \frac{1}{x} & si \ x \ge 1 \end{cases}.$$

On vérifie facilement que sa fonction de survie 1-G est à variations régulières d'exposant -1, c'est-à-dire, pour  $x \ge 1$ ,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-G(tx)}{1-G(t)}=x^{-1}$$

(voir par exemple Resnick, 1987, p.12). On déduit alors du Théorème 2.1.1 de Galambos (1987) que la loi limite du maximum des  $Y_i$  existe et qu'elle est une loi de Fréchet, les constantes  $a_n$  et  $b_n$  étant respectivement égales à n et 0.

#### 2.2 Cas bivarié

Comme pour le cas univarié, il est nécessaire dans le cas bivarié d'ordonner les couples de variables aléatoires. Cependant, puisqu'il est plutôt rare que les deux composantes d'un même couple soient des maxima ou des minima sur l'ensemble des composantes, on doit alors déterminer en quel sens les observations seront ordonnées. Contrairement au cas unidimensionnel, pour lequel le maximum ne pouvait être déterminé qu'en utilisant les définitions sur les statistiques d'ordre, il existe plusieurs choix possibles pour définir le concept d'ordre dans le cas bivarié. Selon Resnick (1987), chapitre 5, le choix communément adopté consiste à ordonner les vecteurs composante par composante, c'est-à-dire que le maximum sur la première composante des couples ainsi que le maximum sur la deuxième composante sont retenus. Notons que le couple formé de ces deux maxima n'est pas en général une observation de l'échantillon. En effet, si l'on examine la Figure 2.1 représentant les couples d'un échantillon bivarié, on s'aperçoit que le point qui représente le couple de maxima n'est pas une observation de l'échantillon. C'est cette principale différence qui rend difficile la généralisation du cas univarié au cas bivarié.



Figure 2.1: Couples de loi bivariée ainsi que le couple de maxima sur les 2 composantes.

Considérons l'échantillon bivarié  $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$  de fonction de répartition F définie sur  $\mathbb{R}^2$ , et posons

$$Z_{1n} = max(X_1, ..., X_n)$$

 $\mathbf{et}$ 

$$Z_{2n} = max(Y_1, \dots, Y_n),$$

c'est-à-dire que  $Z_{1n}$  est la plus grande observation de l'échantillon  $X_1, ..., X_n$ , et  $Z_{2n}$ celle de l'échantillon  $Y_1, ..., Y_n$ . S'il existe des suites de réels  $a_{1n}, a_{2n} > 0$  et  $b_{1n}, b_{2n}$  telles que

$$\lim_{n \to \infty} P(\frac{Z_{1n} - b_{1n}}{a_{1n}} \le x, \frac{Z_{2n} - b_{2n}}{a_{2n}} \le y) = M(x, y), \tag{2.4}$$

où M est une fonction de répartition bivariée dont les lois marginales ne sont pas dégénérées, alors M est appelée loi bivariée des valeurs extrêmes du maximum.

Comme pour le cas univarié, on dit alors que la fonction de répartition F appartient au domaine d'attraction maximum de M.

De façon similaire, si

$$W_{1n} = min(X_1, \dots, X_n)$$

$$W_{2n} = min(Y_1, \dots, Y_n),$$

c'est-à-dire que  $W_{1n}$  est la plus petite observation de l'échantillon  $X_1, ..., X_n$  et  $W_{2n}$ celle de l'échantillon  $Y_1, ..., Y_n$ , et qu'ils existent des suites de réels  $a_{1n}, a_{2n} > 0$  et  $b_{1n}, b_{2n}$  telles que

$$\lim_{n \to \infty} P(\frac{W_{1n} - b_{1n}}{a_{1n}} \le x, \frac{W_{2n} - b_{2n}}{a_{2n}} \le y) = L(x, y),$$

où L est une fonction de répartition bivariée, dont les lois marginales ne sont pas dégénérées, alors L est appelée loi bivariée des valeurs extrêmes du minimum.

Nous nous limiterons par la suite à exposer les résultats pour les lois des valeurs extrêmes du maximum seulement. Le théorème suivant (voir par exemple Galambos, 1987, p.293) précise quelques propriétés des lois bivariées des valeurs extrêmes.

**Théorème 2.1.** Toute loi limite M vérifiant (2.4) est continue. De plus, ses lois marginales admettent un des trois types énumérés en (2.2).

Puisque ces fonctions de répartition M sont continues, elles peuvent s'écrire de façon unique sous la forme

$$M(x, y) = C\{F(x), G(y)\},\$$

où C(u, v) est une fonction de répartition bidimensionnelle appelée copule (Sklar, 1959), définie sur le carré unité, et dont les lois marginales sont uniformes. Cette forme permet de séparer l'effet des marges de l'effet de la dépendance du couple (X, Y).

**Théorème 2.2.** Soit  $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$  un échantillon bidimensionnel d'une loi F. Alors, il existe des constantes réelles  $a_{1n}, a_{2n} > 0$  et  $b_{1n}, b_{2n}$  telles que

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{Z_{1n}-b_{1n}}{a_{1n}} \le x, \frac{Z_{2n}-b_{2n}}{a_{2n}} \le y) = M(x,y),$$

où M est une fonction de répartition qui n'est pas dégénérée, si et seulement si les lois marginales de M sont des lois de valeurs extrêmes univariées et si la copule C qui lui est associée satisfait pour tout  $k \in N \setminus \{0\}$ , et pour tous  $u, v \in [0, 1]$ , l'équation

$$C(u, v) = C^{k}(u^{1/k}, v^{1/k}).$$

Ce dernier résultat, qui est une caractérisation de loi des valeurs extrêmes bivariée, ne fournit pas la forme générale de ces lois. Il existe d'autres caractérisations mettant en lumière cette forme qui, naturellement, dépend des lois marginales. Cependant, comme on l'a vu dans la section précédente, il est possible d'obtenir une loi des valeurs extrêmes univariée à partir d'une autre par un simple changement de variables. Ainsi, peut-on choisir un des trois types de lois marginales sans affecter sensiblement la représentation d'une fonction de valeurs extrêmes bivariée M.

La représentation suivante, due à Pickands (1981), est donnée dans le cas d'une loi M bidimensionnelle admettant des marges de Fréchet unités (pour d'autres cas, voir par exemple Pickands, 1981, Galambos, 1987, p. 309, et Resnick, 1987, p. 268 et 272).

**Théorème 2.3.** Soit M une loi bidimensionnelle dont les lois marginales sont des lois de Fréchet unités. Soit S(p) une mesure positive finie sur l'intervalle [0, 1]. Alors M est une loi des valeurs extrêmes bivariée si et seulement si, pour tout  $x, y \in R^+$ 

$$M(x,y) = exp[-\int_0^1 max\{p/x, (1-p)/y\}dS(p)]$$

et

$$M(x, y) = 0$$
, ailleurs.

Remarquons que la contrainte imposée sur les lois marginales de M implique

$$\int_0^1 p dS(p) = \int_0^1 (1-p) dS(p) = 1,$$

d'où l'on déduit que S/2 est une loi de probabilité sur (0, 1) de moyenne 1/2. Pickands (1981) a montré que la loi M pouvait alors s'écrire sous la forme suivante:

$$log M(x, y) = -(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})A(\frac{y}{x+y}), \qquad (2.5)$$

où la fonction A, appelée fonction de dépendance, est liée à la loi S/2 par la relation suivante:

$$A(t) = \int_0^1 \max\{pt, (1-p)(1-t)\} dS(p).$$
(2.6)

La fonction A est une fonction définie sur l'intervalle [0, 1], vérifiant  $max(t, 1 - t) \leq A(t) \leq 1$ . Puisque A est une fonction convexe, A'(t) existe partout, sauf peut-être en un

nombre dénombrable de points, auquel cas les dérivées à gauche et à droite existent:  $-1 \leq A'(t) \leq 1$ ,  $\lim_{t\to 0^+} A'(t) \geq -1$ ,  $\lim_{t\to 1^-} A'(t) \leq 1$ . Enfin, A(t) est symétrique par rapport à 1/2 si et seulement si les variables aléatoires U et V sont échangeables, c'est-à-dire C(u, v) = C(v, u). Notons que lorsque pour  $0 \leq t \leq 1$ , A(t) = 1 alors

$$M(x,y) = e^{-x^{-1}-y^{-1}},$$

ce qui correspond à l'indépendance entre X et Y.

De la relation (2.5), on déduit aisément que la copule C(u, v) associée à la loi M a la forme suivante:

$$C(u,v) = exp[\{log(uv)\}A\{\frac{log(u)}{log(uv)}\}], \ \forall \ 0 \le u,v \le 1.$$
(2.7)

Cette copule ne dépend pas des lois marginales de la loi M et donc toutes les copules associées aux lois des valeurs extrêmes ont la forme (2.7). On les appelle les copules des valeurs extrêmes. Les exemples qui suivent présentent certaines copules de valeurs extrêmes ainsi que les graphiques représentant la fonction de dépendance associée à ces copules. Exemple 2.2: La copule de Gumbel de type B

$$A(t) = \{(1-t)^r + t^r\}^{1/r}, \text{ pour } r \ge 1;$$
$$C(u,v) = exp[\{-log(u)\}^r + \{-log(v)\}^r]^{1/r}.$$



Figure 2.2: Graphique de la fonction de dépendance A de la copule de Gumbel de type B pour r = 1.5.

#### Exemple 2.3: La copule de Galambos

$$A(t) = 1 - \{(1-t)^{-\theta} + t^{-\theta}\}^{-1/\theta}, \text{ pour } \theta \ge 0;$$
$$C(u,v) = uvexp[\{-log(u)\}^{-\theta} + \{-log(v)\}^{-\theta}]^{-1/\theta}.$$



Figure 2.3: Graphique de la fonction de dépendance A de la copule de Galambos pour  $\theta = 1.5$ .

Exemple 2.4: La copule de Cuadras-Augé généralisée

$$\begin{aligned} A(t) &= max\{1 - \theta t, 1 - \beta(1 - t)\}, \ pour \ 0 \leq \theta, \beta \leq 1; \\ C(u, v) &= u^{1 - \theta} v^{1 - \beta} min(u^{\theta}, v^{\beta}). \end{aligned}$$



Figure 2.4: Graphique de la fonction de dépendance A de la copule de Cuadras-Augé généralisée pour  $\theta = 0.25$  et  $\beta = 0.25$ .

Ainsi, lorsqu'une loi bivariée des valeurs extrêmes possède des marges connues, son expression ne dépend alors que de la fonction A. Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser à l'estimation de cette fonction de dépendance A dans un cadre non paramétrique.

## Chapitre 3

# Estimation de la fonction de dépendance

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit brièvement certaines caractérisations et représentations des lois bivariées des valeurs extrêmes liées aux maxima. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'estimation de la fonction de dépendance de ces lois dans les deux situations suivantes.

Dans la première, on dispose d'un échantillon d'une loi bivariée de valeurs extrêmes. On rencontre cette situation en pratique lorsque, par exemple, on s'intéresse à des maxima annuels et que l'on possède des données bidimensionnelles journalières ou hebdomadaires, et ce sur plusieurs années. On peut alors, pour chaque ensemble de données d'une année, déterminer les valeurs extrêmes. Ainsi, possède-t-on un échantillon, dont la taille est égale au nombre d'années, que l'on peut considérer issu d'une loi de valeurs extrêmes bivariée.

Dans la deuxième situation, on dispose d'un échantillon d'une loi F bidimensionnelle et on cherche à estimer la loi asymptotique des maxima de ces données. Ceci se produit, par exemple, lorsqu'on ne dispose que d'un ensemble de données sur une année et que l'on s'intéresse aux maxima annuels. Le premier estimateur que nous allons décrire, proposé par Capéraà, Fougères et Genest (1997a), est adapté à la première situation alors que les deux suivants, dûs à Khoudraji (1995) et à Joe, Smith et Weissman (1992), concernent la deuxième. Ces derniers s'appuient sur une approche de l'étude des lois des valeurs extrêmes multivariées basée sur les processus ponctuels (voir par exemple de Haan, 1985, ou Resnick, 1987, chapitre 5). Plus précisément, considérons un échantillon  $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$  d'une loi bidimensionnelle F appartenant au domaine d'attraction d'une loi de valeurs extrêmes bivariée M. Supposons que les marges de F soient des lois de Fréchet unités, ce qui peut toujours s'obtenir par un simple changement de variables, et considérons le processus ponctuel sur  $R^{2+}$  associé à  $\{\frac{1}{n}(X_1, Y_1), ..., \frac{1}{n}(X_n, Y_n)\}$ , où la constante 1/n est due au fait que les marges sont de Fréchet (voir l'Exemple 2.1). Ce processus ponctuel converge en loi vers un processus de Poisson non-homogène sur  $R^{+2} \setminus \{0, 0\}$ , dont la mesure d'intensité  $\mu^*$ , ou mesure moyenne, vérifie, pour tout Borélien B de  $R^{+2} \setminus \{0, 0\}$  et pour tout t réei strictement positif,

$$\mu^*(tB) = t^{-1}\mu^*(B).$$

Posons  $R_i = \frac{X_i + Y_i}{n}$  et  $W_i = \frac{X_i}{nR_i}$ , i = 1, ...n. Alors, avec ces nouvelles variables, la mesure d'intensité  $\mu^*$  du processus limite s'exprime comme une mesure produit, soit

$$\mu^*(dr \ge dw) = \frac{dr}{r^2} dS(w), \qquad (3.1)$$

où S est une mesure positive finie sur [0, 1] vérifiant les conditions

$$\int_0^1 w dS(w) = \int_0^1 (1-w) dS(w).$$

On déduit alors de la Proposition 5.11, chapitre 5 de Resnick (1987), que la relation entre  $\mu^*$  et S est donnée par

$$-\log\{M(x,y)\} = \int_0^1 \max(\frac{w}{x}, \frac{1-w}{y}) dS(w) = \mu^*(\{[0,x] \ge [0,y]\}^c) = \mu(x,y),$$

d'où l'on tire d'après (2.5)

$$\mu(x,y) = (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})A(\frac{y}{x+y}), \qquad (3.2)$$

A étant la fonction de dépendance de la loi M.

Nous terminons cette section par un résultat de de Haan (1985) qui sera utile dans la méthode d'estimation de Khoudraji.

**Proposition 3.1.** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi F, appartenant au domaine d'attraction d'une loi H, dont les marginales sont des lois de Fréchet unités, alors

$$\lim_{u\to\infty} P(\frac{X}{X+Y} \le w \mid X+Y > u) = \frac{S(w)}{2}.$$

De cette proposition, on déduit que S/2 est la fonction de répartition conditionnelle de la variable X/(X+Y), sachant que X+Y est supérieure à u, et ce lorsque u tend vers l'infini.

Dans les sections suivantes, nous allons décrire les trois méthodes d'estimation de la fonction de dépendance d'une loi de valeurs extrêmes bidimensionnelle. Ces méthodes seront comparées dans un chapitre ultérieur.

#### 3.1 Méthode d'estimation de Capéraà, Fougères et Genest

Comme nous l'avons cité dans l'introduction de ce chapitre, la méthode d'estimation, due à Capéraà et al. (1997a), est définie à partir d'un échantillon d'une loi bivariée de valeurs extrêmes dont les marges sont connues. L'estimateur que nous proposons est une extension du précédent obtenu en remplaçant les observations par leur rang, et peut donc s'appliquer au cas où les marges de la loi bivariée sont inconnues.

Soit  $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$  un échantillon de loi bivariée de maxima, ayant comme fonction de répartition L et supposons tout d'abord que les lois marginales, F et G, soient connues. Nous savons que la fonction de répartition associée aux lois des valeurs extrêmes s'exprime sous la forme

$$M(x,y) = C\{F(x), G(y)\},\$$

où

$$C(u,v) = P\{F(X) \le u, G(Y) \le v\} = exp[log(uv)A\{\frac{log(u)}{log(uv)}\}],$$

A satisfaisant les conditions énumérées au chapitre 2.

Posons  $Z_i = \frac{\log(U_i)}{\log(U_iV_i)}$ , i = 1, ..., n. La proposition suivante due à Khoudraji (1995) donne la forme de la fonction de répartition des  $Z_i$ .

**Proposition 3.2.** Soit C une copule aux valeurs extrêmes de fonction de dépendance A. La fonction de répartition de la variable aléatoire Z = log(U)/log(UV) est donnée par H(z) = z + z(1-z)D(z) où D(z) = A'(z)/A(z),  $0 \le z \le 1$ .

De cette proposition, on obtient la caractérisation suivante:

$$\frac{A(t)}{A(s)} = exp\{\int_s^t \frac{H(z) - z}{z(1-z)} dz\}$$

où  $0 \le s \le t \le 1$ . Ainsi, puisque A(0) = A(1) = 1, on obtient

$$A(t) = exp\{\int_0^t \frac{H(z) - z}{z(1 - z)} dz\} = exp\{-\int_t^1 \frac{H(z) - z}{z(1 - z)} dz\}.$$
(3.3)

Deux estimateurs non paramétriques possibles pour A sont obtenus en remplaçant H par  $H_n$  dans l'expression (3.3), soit

$$A_{n}^{0}(t) = exp\{\int_{0}^{t} \frac{H_{n}(z) - z}{z(1 - z)} dz\}$$
  
et  
$$A_{n}^{1}(t) = exp\{-\int_{t}^{1} \frac{H_{n}(z) - z}{z(1 - z)} dz\},$$
(3.4)

où  $H_n$  est la fonction de répartition empirique des pseudo-observations  $Z_i$ , i = 1, ..., n.

Capéraà et al. (1997a) ont montré que la variance asymptotique de  $log\{A_n^0(t)\}$  était une fonction croissante de t et qu'a contrario celle de  $log\{A_n^1(t)\}$  était une fonction décroissante. Ainsi, puisque l'estimateur  $log\{A_n^0(t)\}$  apparait comme un estimateur de moins en moins fiable de  $log\{A(t)\}$  lorsque t tend vers 1, et que  $log\{A_n^1(t)\}$  devient également de moins en moins fiable lorsque t tend vers 0, il est alors raisonnable de considérer une combinaison de ces derniers comme estimateur de log(A), attribuant plus de poids à  $log\{A_n^0(t)\}$  au voisinage de 0 et à  $log\{A_n^1(t)\}$  à proximité de 1. Aussi ces auteurs ont-ils suggéré comme estimateur de log(A) la combinaison suivante:

$$log\{A_n(t)\} = p(t)log\{A_n^0(t)\} + \{1 - p(t)\}log\{A_n^1(t)\},\$$

où p est une fonction de poids bornée sur [0, 1] prenant la valeur 1 en 0 et la valeur 0 en 1. Ainsi  $A_n(t)$  prendra la valeur 1 pour t = 0 et t = 1, ce qui est une propriété de la fonction de dépendance A. Dans la suite, nous prendrons p(t) = 1 - t,  $0 \le t \le 1$ .

Cet estimateur de log(A) est sans biais et converge presque sûrement uniformément. Dans le cas où les pseudo-observations sont toutes distinctes, la proposition suivante (Capéraà et al., 1997a) donne une expression explicite de cet estimateur.

**Proposition 3.3.** Soient  $Z_{(1)}, ..., Z_{(n)}$  les statistiques d'ordre associées aux pseudoobservations  $Z_i$ , i=1,...,n, supposées distinctes, et soit

$$Q_i = \{\prod_{k=1}^{i} Z_{(k)} / (1 - Z_{(k)})\}^{1/n}, 1 \le i \le n.$$

Soit p une application bornée, définie sur [0,1]; l'estimateur  $A_n$  défini par

$$log\{A_n(t)\} = p(t)log\{A_n^0(t)\} + \{1 - p(t)\}log\{A_n^1(t)\}$$

s'écrit de façon explicite sous la forme:

$$A_{n}(t) = \begin{cases} (1-t)Q_{n}^{1-p(t)} & si \ 0 \le t \le Z_{(1)} \\ \\ t^{i/n}(1-t)^{1-i/n}Q_{n}^{1-p(t)}Q_{i}^{-1} & si \ Z_{(i)} < t \le Z_{(i+1)}, i = 1, ..., n-1 \\ \\ tQ_{n}^{-p(t)} & si \ Z_{(n)} < t \le 1 \\ \end{cases}$$

Notons que ce nouvel estimateur,  $A_n$ , n'est pas sans biais pour A puisque, en vertu de l'inégalité de Jensen,  $E(A_n) > exp[E\{log(A_n)\}] = A$ . Mais  $A_n$  est un estimateur asymptotiquement sans biais pour A, fortement uniformément convergent, et ce pour une fonction de poids p bornée sur [0, 1].

Lorsque les lois marginales ne sont pas connues, ce qui est très souvent le cas, on peut les estimer par les lois marginales empiriques. Les pseudo-observations deviennent alors

$$Z_{in}^* = \frac{\log\{F_n(X_i)\}}{\log\{F_n(X_i)G_n(Y_i)\}} \approx \frac{\log(\frac{i}{n+1})}{\log\{\frac{iS_i}{(n+1)^2}\}},$$

où  $S_i$  représente le rang de  $Y_i$  lorsque les  $X_i$  sont ordonnées par ordre croissant. L'estimateur pour log(A) que nous proposons s'écrit alors

$$log\{A_n^*(t)\} = p(t)log\{A_n^{0*}(t)\} + \{1 - p(t)\}log\{A_n^{1*}(t)\}$$

où  $log\{A_n^{0*}(t)\}$  et  $log\{A_n^{1*}(t)\}$  sont obtenus en remplaçant  $H_n$  par  $H_n^*$  dans l'expression (3.4),  $H_n^*$  étant la fonction de répartition empirique des  $Z_{in}^*$ . Cet estimateur est fortement uniformément convergent comme nous le montrons dans la proposition suivante.

**Proposition 3.4.** La quantité  $log(A_n^*)$  est un estimateur fortement uniformément convergent, c'est-à-dire,

$$sup_{t\in[0,1]} \mid log\{A_n^*(t)\} - log\{A(t)\} \mid \longrightarrow 0 \ p.s., \ si \ n \to \infty.$$

**Démonstration.** Considérons (X, Y) suivant la loi M(x, y) de copule C, c'est-à-dire que

$$M(x, y) = C\{F(x), G(y)\},\$$

et  $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$  un échantillon issu de M. Soient  $F_n$ ,  $G_n$ , les fonctions de répartition marginales empiriques renormalisées,

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i \le x\}} \text{ et } G_n(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I_{\{Y_i \le y\}}.$$

Soit  $C_n$  la copule empirique "renormalisée", c'est-à-dire

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{\{F_n(X_k) \le u\}} I_{\{G_n(Y_k) \le v\}}$$

Considérons également les variables aléatoires discrètes  $Z_i^* = \frac{\log\{F_n(X_i)\}}{\log\{F_n(X_i)G_n(Y_i)\}}, i = 1, ..., n$ , possédant  $n^2$  valeurs possibles,  $z_{n,1,n} \leq ... \leq z_{1,n,n}$ , où

$$z_{n,1,n} = \frac{1}{1 + \frac{\log(\frac{1}{n+1})}{\log(\frac{n}{n+1})}} = \frac{\log(\frac{n}{n+1})}{\log\{\frac{n}{(n+1)^2}\}}.$$

Soit  $H_n^*$  la fonction de répartition empirique associée à ces  $Z_i^*$ ,

$$H_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{Z_i^* \le z\}}$$

et soit H la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Z = \frac{\log\{F(x)\}}{\log\{F(x)G(y)\}}$ . On doit montrer que

$$|log\{A_n^{0*}(t)\} - log\{A(t)\}| \longrightarrow 0 \text{ p.s., si } n \to \infty, t \in [0, 1],$$

où  $\log\{A_n^{0*}(t)\} = \int_0^t \frac{H_n^*(z)-z}{z(1-z)} dz$  et  $\log\{A(t)\} = \int_0^t \frac{H(z)-z}{z(1-z)} dz$ .

1) Considérons le cas où  $t \in (0, 1/2]$ .

On a

$$\begin{aligned} |\log\{A_n^{0*}(t)\} - \log\{A(t)\}| &= |\int_0^t \frac{(H_n^* - H)(z)}{z(1-z)} dz| \\ &\leq \int_0^{z_{n,1,n}} \frac{H(z)}{z(1-z)} dz + \frac{1}{1-t} \sup_{[z_{n,1,n},t]} |H_n^* - H|(z) \int_{z_{n,1,n}}^t \frac{dz}{z} dz \end{aligned}$$

car  $z_{n,1,n} \to 0$ , donc à partir d'un certain rang on a  $z_{n,1,n} \leq t$ . Comme  $H(z)/\{z(1-z)\}$ est une quantité bornée (voir démonstration de Proposition 3.1, Capéraà et al., 1997a), on peut écrire,  $\forall \epsilon > 0$  et à partir d'un certain rang  $n_{\epsilon}$ ,

$$|\log\{A_n^{0*}(t)\} - \log\{A(t)\}| \le \epsilon + \frac{1}{1-t} \sup_{[z_{n,1,n},t]} |H_n^* - H|(z)| \log(z_{n,1,n})|,$$

et puisque  $t \in [0, 1/2]$ 

$$sup_{[0,1/2]}|log\{A_n^{0*}(t)\} - log\{A(t)\}| \le \epsilon + 2sup_{[z_{n,1,n},1/2]}|H_n^* - H|(z)|log(z_{n,1,n})|.$$

Premièrement, montrons que  $\forall \alpha < 1/2$ ,

$$n^{\alpha}sup_{[0,1/2]}|H_{n}^{*}-H|(z)\longrightarrow 0 \text{ p.s., si }n\rightarrow\infty.$$

Exprimons tout d'abord  $H_n^*$  et H en terme de  $C_n$  et C.

$$H_n^*(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[\frac{\log\{F_n(X_i)\}}{\log\{F_n(X_i)G_n(Y_i)\}} \le z]$$
  
=  $\int \int_{[0,1]^2} I_{[0,z]}\{\frac{\log(u)}{\log(uv)}\} dC_n(u,v),$ 

et de même on a

$$H(z) = \int \int_{[0,1]^2} I_{[0,z]} \{ \frac{\log(u)}{\log(uv)} \} dC(u,v).$$

Ainsi,

$$(H_n^* - H)(z) = \int \int_{[0,1]^2} I_{[0,z]} \{ \frac{\log(u)}{\log(uv)} \} d(C_n - C)(u,v)$$
  
=  $\int \int I_{D_z}(u,v) d(C_n - C)(u,v)$   
 $u,v) \in (0,1)^2 : v \le u^{(\frac{1-z}{z})} \}.$ 

où  $D_z = \{(u, v) \in (0, 1)^2 : v \le u^{(\frac{1-z}{z})}\}.$ 

Faisons une intégration par parties dont nous rappelons les conditions (Hildebrandt, 1963, Théorème 8.8, p.127).

**Théorème.** Soient 2 fonctions f et g de  $[a, a'] \ge [b, b']$  dans R telles que

$$\int_{[a,a'] \times [b,b']} \{f(x,y) - f(x,b) - f(a,y) + f(a,b)\} dg(x,y)$$

existe, alors

$$\int_{[a,a'] \times [b,b']} \{g(x,y) - g(x,b') - g(a',y) + g(a',b')\} df(x,y)$$

existe, et ces deux intégrales sont égales.

En posant  $g_z(x,y) = I_{D_z}(x,y)$  et  $f_n(x,y) = n^{\alpha}(C_n - C)(x,y)$  sur  $[0,1] \ge [0,1]$ , et en appliquant le résultat de ce théorème, puisque  $g_z(x,1) = f_n(0,y) = f_n(x,0) =$  $f_n(0,0) = 0$  et  $g_z(1,y) = g_z(1,1) = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{z \in [0,1]} \left| \int \int_{[0,1]^2} f_n(x,y) dg_z(x,y) \right| &\leq \sup_{[0,1]^2} |f_n(x,y)| \ V_g \\ &= n^{\alpha} \sup_{[0,1]^2} |C_n - C|(x,y)| \end{aligned}$$

où  $V_g = 1$  représente la variation totale de g. D'après le Théorème 3.1 de Deheuvels (1979), on a

$$\forall \alpha < 1/2, \ n^{\alpha} sup_{[0,1]^2} | C_n - C | (x, y) \to 0 \ p.s.$$

On en déduit d'après le Théorème 8.8 de Hildebrandt cité ci-haut que

$$n^{\alpha}sup_{[0,1]}|H_{n}^{*}-H|(z)=sup_{z\in[0,1]}|\int\int_{[0,1]^{2}}g_{z}(x,y)df_{n}(x,y)|$$

converge presque sûrement vers zéro uniformément.

Montrons maintenant que  $\frac{|log(z_{n,1,n})|}{n^{\alpha}}$  est une quantité bornée. En se servant de l'expression de  $z_{n,1,n}$ ,

$$z_{n,1,n} = \frac{\log(\frac{n}{n+1})}{\log\{\frac{n}{(n+1)^2}\}}$$

et en posant  $x = \frac{1}{n+1}$ , on obtient, pour *n* assez grand

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{\alpha}} log(z_{n,1,n}) &= \frac{1}{n^{\alpha}} log[\frac{log(\frac{n}{n+1})}{log\{\frac{n}{(n+1)^2}\}}] \\ &\approx x^{\alpha} log[\frac{log(1-x)}{log\{x(1-x)\}}] \\ &\approx x^{\alpha} [log\{-log(1-x)\} - log[-log\{x(1-x)\}]] \\ &\approx x^{\alpha} log(x) - x^{\alpha} log\{-log(x)\}. \end{aligned}$$

Or, lorsque  $x \rightarrow 0$ ,

 $x^{\alpha}log(x) \to 0$ 

et en posant u = -log(x), on obtient si  $x \to 0$ 

$$x^{\alpha}log\{-log(x)\} = e^{-\alpha u}log(u) \to 0.$$

On en déduit que pour  $\alpha < 1/2$ 

$$\frac{|log(z_{n,1,n})|}{n^{\alpha}} \to 0, \ si \ n \to \infty.$$

Puisque

$$n^{\alpha}sup_{[0,1]}|H_{n}^{*}-H|(z)\longrightarrow 0 \text{ p.s., si } n\rightarrow\infty,$$

et que

$$\frac{|log(z_{n,1,n})|}{n^{\alpha}} \to 0, \ si \ n \to \infty,$$

alors

$$2sup_{[z_{n,1,n},1/2]}|H_n^* - H|(z)|log(z_{n,1,n})| \longrightarrow 0 \text{ p.s., si } n \to \infty,$$

d'où

$$sup_{[0,1/2]}|log\{A_n^{0*}(t)\} - log\{A(t)\}| \longrightarrow 0 \text{ p.s., si } n \to \infty.$$

2) Soit maintenant  $t \in (1/2, 1]$ .

On a

 $|\log\{A_n^{0*}(t)\} - \log\{A(t)\}| \le \sup_{[0,1/2]} |\log\{A_n^{0*}(t)\} - \log\{A(t)\}| + |\int_{1/2}^t \frac{(H_n^* - H)(z)}{z(1-z)} dz|.$  De plus,

$$\begin{aligned} |\int_{1/2}^{t} \frac{(H_{n}^{*} - H)(z)}{z(1-z)} dz| &\leq 2sup_{[1/2,t]} |H_{n}^{*} - H|(z)| \int_{1/2}^{t} \frac{dz}{1-z}| \\ &\leq 2sup_{[1/2,t]} |H_{n}^{*} - H|(z)log(\frac{1}{1-t}) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$z_{1,n,n} = \frac{1}{1 + \frac{\log\{n/(n+1)\}}{\log\{1/(n+1)\}}} = \frac{\log(n+1)}{\log\{\frac{(n+1)^2}{n}\}} \to 1, \text{ si } n \to \infty,$$

donc  $t < z_{1,n,n}$ , à partir d'un certain rang.

Par suite,

$$|\int_{1/2}^{t} \frac{(H_n^* - H)(z)}{z(1-z)} dz| \leq 2sup_{[1/2,t]}|H_n^* - H|(z)log(\frac{1}{1-z_{1,n,n}}).$$

En faisant une intégration par parties comme précédemment, on obtient

$$n^{\alpha}sup_{[1/2,t]}|H_n^*-H|(z) \longrightarrow 0 \text{ p.s., si } n \to \infty.$$

De plus, on peut vérifier que

$$\frac{1}{1-z_{1,n,n}}=\frac{1}{z_{n,1,n}}$$

donc

$$log(\frac{1}{1-z_{1,n,n}}) = log(z_{n,1,n}),$$

et puisque  $\frac{|log(z_{n,1,n})|}{n^{\alpha}} \to 0$ , on conclut:

$$sup_{[1/2,1]}|log\{A_n^{0*}(t)\} - log\{A(t)\}| \longrightarrow 0 \text{ p.s., si } n \to \infty.$$

De la même façon, on peut montrer que

$$sup_{[1/2,1]}|log\{A_n^{1*}(t)\} - log\{A(t)\}| \longrightarrow 0 \text{ p.s., si } n \to \infty,$$

ce qui complète la preuve.

#### 3.2 Méthode du seuil de Khoudraji

Cette méthode d'estimation de la fonction de dépendance A a été esquissée par de Haan (1985). Supposons que  $(X_i, Y_i)$ , i = 1, ..., n, suit une loi F dont les marginales  $F_1$  et  $F_2$ sont des lois de Fréchet unités. Considérons les variables  $R_i = X_i + Y_i$  et  $W_i = X_i/R_i$ , i = 1, ..., n, alors, d'après la relation (2.6), la fonction A est liée à la fonction S par

$$A(t) = \int_0^1 max\{wt, (1-w)(1-t)\}dS(w).$$
(3.5)

De plus, d'après la Proposition 3.1, nous avons

$$\lim_{u \to \infty} P(\frac{X}{X+Y} \le w \mid X+Y > u) = \frac{S(w)}{2}, \tag{3.6}$$

d'où l'on déduit que S/2 est la fonction de répartition conditionnelle de  $W_i$ , sachant que  $R_i$  est supérieur à u, et ce lorsque u tend vers l'infini. On peut alors estimer A en remplaçant dans (3.5) S/2 par  $S_n/2$ , la fonction de répartition empirique des  $W_i$  pour lesquels les  $R_i$  sont supérieurs à u. Le choix de u doit être fait en tenant compte, entre autres, de l'équation (3.6) qui implique que u doit être assez grand pour que les  $W_i$  et les  $R_i$ , tels que  $R_i > u$ , soient indépendants. Cependant, pour une taille d'échantillon fixée, on ne peut pas choisir u trop grand car on risque de ne pas avoir alors assez d'observations pour estimer convenablement A. Aussi cette valeur u = u(n) dépendra de la taille n de l'échantillon et nous appellerons seuil de l'estimateur de Khoudraji la quantité u(n)/n. Dans les chapitres qui vont suivre nous considèrerons plusieurs seuils possibles.

Nous avons vu plus haut que, dans cette approche, on faisait l'hypothèse que les lois marginales de la loi F des  $(X_i, Y_i)$  étaient des lois de Fréchet. Comme cette condition n'est pas en général vérifiée, on peut la satisfaire en effectuant le changement de variables suivant:

$$X_i^* = -\frac{1}{\log\{F_1(X_i)\}} \text{ et } Y_i^* = -\frac{1}{\log\{F_2(Y_i)\}}, \ i = 1, ..., n.$$

En effet on a, par exemple, pour  $X_i^*$ ,

$$P(X_i^* \le x) = P[\log\{F_1(X_i)\} \le -\frac{1}{x}] = P\{F_1(X_i) \le e^{-1/x}\} = e^{-1/x}, \ x \ge 0.$$

Comme les lois  $F_1$  et  $F_2$  ne sont pas connues, on peut les remplacer par les fonctions de répartition empiriques correspondantes. Ainsi, si n n'est pas trop petit, les nouvelles variables  $X_i^*$  et  $Y_i^*$  définies par

$$X_i^* = -\frac{1}{\log(\frac{Q_{xi}-1/2}{n})}$$

et

$$Y_i^* = -\frac{1}{\log(\frac{Q_{yi}-1/2}{n})}$$

où  $Q_{xi}$  et  $Q_{yi}$  sont les rangs de  $X_i$  et  $Y_i$  respectivement, suivent approximativement des lois de Fréchet unités. Considérons alors les variables

$$R_i = X_i^* + Y_i^*$$

$$W_i = X_i^* / R_i$$

on obtient l'estimateur de A suivant:

$$\hat{A}_n(t) = \int max\{wt, (1-w)(1-t)\} dS_n(w) = \frac{2}{n^*} \sum_{i=1}^{n^*} max\{W_it, (1-W_i)(1-t)\},\$$

où  $n^*$  représente le nombre de  $W_i$  correspondant aux  $R_i > u(n)$ , et ce pour un choix de u(n) assez grand pour que les  $W_i$  et les  $R_i$  soient indépendants.

### 3.3 Méthode d'estimation de Joe, Smith et Weissman

Supposons toujours que la loi F de  $(X_i, Y_i)$ , i = 1, ..., n, a pour marginales des lois de Fréchet unités. Le processus ponctuel associé à  $\{T_i(\beta) = n^{-1}max(X_i, \beta^{-1}Y_i); i = 1, ..., n\}$  tend vers un processus de Poisson non-homogène défini sur  $(0, +\infty)$  et d'intensité  $\mu$  vérifiant, pour y > 0 et  $\beta > 0$ ,

$$\mu(y,\beta y)=y^{-1}\mu(1,\beta).$$

Ce résultat asymptotique ne peut s'appliquer que pour *n* assez grand et pour les  $T_i(\beta)$ assez grands eux-aussi, c'est-à-dire supérieurs à un certain seuil *T*. Considérons les  $T_i(\beta)$  supérieurs ou égaux à *T*. On déduit de ce résultat asymptotique que l'espérance de leur nombre est approximativement égal à  $T^{-1}\mu(1,\beta)$ . Si l'on prend maintenant  $T = T_{[k]}(\beta)$ , où  $T_{[k]}(\beta)$  est le kième plus grand  $T_i(\beta)$ , alors un estimateur de  $\mu(1,\beta)$  est  $kT_{[k]}(\beta)$  puisqu'il y a *k* pseudo-observations  $T_i(\beta)$  plus grandes que  $T_{[k]}(\beta)$ . Puisque ce raisonnement peut-être fait pour tous les  $T_i(\beta)$  plus grands ou égaux au seuil *T*, que l'on déterminera plus loin, on peut remplacer  $kT_{[k]}(\beta)$  par une moyenne des  $iT_{[i]}(\beta)$  à condition que ces derniers soient approximativement constants. Ceci devrait permettre de diminuer la variabilité de  $\mu(1,\beta)$ . D'après la relation (3.2), on a

$$\mu(1,\beta)=(1+\beta^{-1})A(\frac{\beta}{1+\beta}),$$

et un estimateur de A sera alors,

$$\hat{A}(\frac{\beta}{1+\beta}) = \sum_{i} \frac{iT_{[i]}(\beta)}{\hat{n}} \frac{1}{1+\beta^{-1}}$$

où  $\hat{n}$  est le nombre de  $T_i(\beta)$  pour lesquels les  $iT_{[i]}(\beta)$  sont approximativement constants.

Afin de vérifier que n et T sont assez grands pour pouvoir appliquer le résultat asymptotique, on peut s'appuyer sur la Proposition 5.17 de Resnick (1987) qui établit la relation suivante entre l'intensité  $\mu$  du processus asymptotique et la loi F des  $(X_i, Y_i)$ , i = 1, ..., n,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F(tx, ty)}{1 - F(t, t)} = \frac{\mu(x, y)}{\mu(1, 1)}$$

Considérons maintenant pour t assez grand,  $y \ge t$  et en posant x = y/t,

$$P\{\max(X_i, \beta^{-1}Y_i) \ge y | \max(X_i, \beta^{-1}Y_i) \ge t\} = \frac{1 - F(y, \beta y)}{1 - F(t, \beta t)}$$
$$= \frac{1 - F(tx, \beta tx)}{1 - F(t, \beta t)}$$
$$\approx \frac{\mu(x, \beta x)}{\mu(1, \beta)}$$
$$= x^{-1}$$
$$= \frac{t}{y}.$$

Ainsi, lorsque T est assez grand et  $\beta$  fixé, on peut considérer que les  $T_i(\beta)$  supérieurs ou égaux à T suivent, conditionnellement, la loi de densité  $\frac{T}{y^2}$ ,  $y \ge T$ , qui est telle que  $E(iT_{[i]}(\beta))$  est approximativement indépendante de i pour i pas trop voisin de 1. En effet, en supposant que  $T_1(\beta), ..., T_{\bar{n}}(\beta)$  est un échantillon de la loi de densité  $\frac{T}{y^2}, y \ge t$ ,  $\bar{n}$  étant le nombre de  $T_i(\beta)$  supérieurs ou égaux à T, on obtient  $E(iT_{[i]}(\beta)) = \frac{i}{i-1}\tilde{n}T$ . On peut donc choisir T de telle façon que les  $iT_{[i]}(\beta)$  soient approximativement constants. C'est la solution suggérée par Joe et al. Afin de respecter l'hypothèse que les lois marginales de F sont des lois de Fréchet unités, on remplace les variables  $X_i$  et  $Y_i$  par  $X_i^*$  et  $Y_i^*$  définies à la Section 3.2.

En ce qui concerne les deux estimateurs proposés respectivement par Khoudraji et Joe et al., nous ne possédons malheureusement pas de propriétés asymptotiques, ni même pour de petits échantillons. Dans le chapitre suivant, nous allons essayer de combler ce manque à partir de simulations.
## Chapitre 4

### **Comparaison des estimateurs**

L'objectif principal de ce chapitre est de comparer au moyen de simulations, et ce pour de petits échantillons, les propriétés des estimateurs de la fonction de dépendance  $A^*$ présentées au chapitre précédent. Cette comparaison va porter essentiellement sur le biais possible des estimateurs que l'on va mesurer de deux façons différentes. Ayant fixé la fonction de dépendance  $A^*$  d'une copule extrême, nous allons déterminer la force de sa dépendance en calculant le tau de Kendall qui est donné par (Khoudraji, 1995)

Pour chaque estimateur, nous calculerons premièrement les tau de Kendall obtenus à partir des estimations de  $A^*$  découlant des différents échantillons simulés, et deuxièmement, les distances  $L_1$  entre  $A^*$  et ses estimations. Ainsi, ayant pour chaque échantillon simulé une estimation du tau de Kendall de  $A^*$  et une valeur de la distance  $L_1$ , nous comparerons les estimateurs selon ces deux mesures ainsi que leur variabilité au moyen de diagrammes en boîte (box-plot).

Les simulations seront faites à partir de lois Archimax, définies par Capéraà et al. (1997b). Ces lois, appartenant au domaine d'attraction de différentes copules de valeurs extrêmes, seront choisies avec des forces de dépendance différentes. De plus, la fonction de dépendance qui leur est associée sera symétrique ou asymétrique. Dans la Section 4.1, nous rappelons la définition des copules Archimax ainsi que leurs algorithmes de simulation. La section suivante est consacrée à la présentation des estimateurs retenus dans cette étude. Dans la Section 4.3, un plan factoriel est proposé pour générer les données provenant des simulations; des analyses de variance suivront pour étayer les comparaisons. Une conclusion générale termine ce chapitre.

### 4.1 Copules Archimax

Une copule bivariée est appelée copule Archimax si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme

$$C_{\phi,A}(x,y) = \phi^{-1}[\{\phi(x) + \phi(y)\}A\{\frac{\phi(x)}{\phi(x) + \phi(y)}\}],$$

pour tout  $0 \le x, y \le 1$ , en terme d'une fonction convexe décroissante  $\phi: (0,1] \rightarrow [0,\infty)$ , vérifiant  $\phi(1) = 0$ , et d'une fonction convexe  $A: [0,1] \rightarrow [1/2,1]$ , telle que  $max(t,1-t) \le A(t) \le 1$ , pour tout  $0 \le t \le 1$ , avec la convention que  $\phi^{-1}(t) = 0$  lorsque  $t \ge \lim_{s\to 0} \phi(s)$ . La fonction  $\phi$  est appelée générateur de la copule.

**Exemple 4.1:** Soit la fonction de dépendance du modèle mixte due à Taun (1988) donnée par

$$A(t) = \theta t^2 - \theta t + 1, \ 0 \le t \le 1, \ 0 \le \theta \le 1,$$

et considérons le générateur de Clayton

$$\phi_{1,\alpha}(t)=\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha}-1), \ \alpha\geq 0,$$

et celui de Franck

$$\phi_{2,\alpha}(t) = -\log(\frac{1-e^{-t\alpha}}{1-e^{-\alpha}}), \ \alpha \in \mathbb{R},$$

alors  $C_{\phi_{1,\alpha},A}$  et  $C_{\phi_{2,\alpha},A}$  sont des lois Archimax. Ces lois seront parmi celles utilisées lors des simulations présentées à la Section 4.3.

Il est important de remarquer que l'ensemble des copules Archimax  $C_{\phi,A}$  contient les copules de valeurs extrêmes ainsi que les copules archimédiennes. En effet, si l'on pose  $\phi(t) = log(1/t)$ , la copule  $C_{\phi,A}$  est alors une copule de valeurs extrêmes, c'est-à-dire

que

$$C_{\phi,A} = C_A(x,y) = exp[\{log(x) + log(y)\}A\{\frac{log(x)}{log(x) + log(y)}\}].$$

De même, si la fonction  $A \equiv 1$  alors, on obtient une copule archimédienne:

$$C_{\phi,A} = C_{\phi}(x,y) = \phi^{-1} \{ \phi(x) + \phi(y) \}$$

La proposition suivante (Capéraà et al., 1997b), établit une relation entre la fonction de dépendance de la copule Archimax  $C_{\phi,A}$  et la fonction de dépendance de son attracteur.

**Proposition 4.1.** Soit  $C_{\phi,A}$  une copule bivariée de fonction de dépendance A et de générateur  $\phi$  tel que  $\phi(1-1/t)$  est à variations régulières de degré -m,  $m \ge 1$ . Alors  $C_{\phi,A}$  est située dans le domaine d'attraction d'une loi de valeurs extrêmes ayant comme fonction de dépendance

$$A^{*}(t) = \{t^{m} + (1-t)^{m}\}^{1/m} A^{1/m} \{\frac{t^{m}}{t^{m} + (1-t)^{m}}\}, \ 0 \le t \le 1.$$
(4.1)

L'équation (4.1) nous permet d'obtenir A en fonction de  $A^*$  et de m, soit

$$A(t) = \{t^{1/m} + (1-t)^{1/m}\}^m [A^* \{\frac{t^{1/m}}{t^{1/m} + (1-t)^{1/m}}\}]^m.$$

Ainsi, pour construire une famille paramétrique de copule Archimax bivariée ayant comme attracteur maximum  $C_{A^*}$ , il suffit de choisir une famille de copule archimédienne ayant un générateur  $\phi$  tel que  $\phi(1-1/t)$  est à variations régulières de degré -m, et de choisir  $m \geq 1$  tel que A soit une fonction de dépendance. On montre que cette dernière condition est satisfaite si et seulement si il existe  $l \geq m$  tel que  $A^* \leq G_l$ , où

$$G_l(t) = \{t^l + (1-t)^l\}^{1/l}, \ 0 \le t \le 1$$

est la fonction de dépendance d'une copule de valeurs extrêmes de Gumbel, de paramètre  $l \ge 1$  (voir justification dans Capéraà et al., 1997b). Notons que l = 1 peut toujours être considéré comme une possibilité pour le choix de l mais, puisque  $m \ge 1$ , on en déduit alors que m = 1 et donc  $A = A^*$ . C'est le cas notamment des générateurs de Clayton et de Franck cités dans l'Exemple 4.1 pour lesquels on a m = 1.

Pour générer des observations d'une copule Archimax  $C_{\phi,A}(x, y)$ , deux méthodes simples nous sont proposées. La première suggère de générer X de loi uniforme [0, 1] et de générer Y de loi conditionnelle  $\partial C_{\phi,A}(x,y)/\partial x$ . Mais puisque cette dernière n'est généralement pas inversible, il sera nécessaire d'utiliser un deuxième algorithme dont la justification est donnée dans Capéraà et al. (1997b):

i) Générer z de fonction de répartition:  $H(z) = z + (1-z) \frac{A'(z)}{A(z)}, \ 0 \le z \le 1;$ 

ii) Etant donné z, générer u de loi uniforme sur l'intervalle [0, 1];

iii) Si  $u \leq p(z) = \frac{z(1-z)A''(z)}{h(z)A(z)}$ , générer w de loi uniforme sur [0, 1]; sinon générer w de loi  $K_{\phi}(t) = t - \lambda_{\phi}(t)$  où  $\lambda_{\phi}(t) = \phi(t)/\phi'(t)$ ;

iv) Déterminer x et y par  $x = \phi^{-1}\{z\phi(w)/A(z)\}$  et  $y = \phi^{-1}\{(1-z)\phi(w)/A(z)\}$ .

Lorsque la fonction de répartition H n'est pas inversible, on utilise alors pour déterminer z la méthode d'acceptation-rejet, la densité de H étant donnée par

$$h(z) = 1 + (1 - 2z)A'(z)/A(z) + z(1 - z)[A''(z)/A(z) - \{A'(z)/A(z)\}^2].$$

### 4.2 Choix des estimateurs

#### 4.2.1 Estimateur de Capéraà, Fougères et Genest

Nous avons vu au chapitre précédent que l'estimation de la fonction de dépendance  $A^*$  sera considérée dans les deux situations suivantes. Dans la première, l'échantillon dont nous disposons est de loi F bidimensionnelle, c'est-à-dire que les observations ne sont pas des maxima. Dans la deuxième, l'estimation est faite à partir d'un échantillon d'une loi bivariée de valeurs extrêmes.

La méthode de Capéraà et al. s'appliquent à des lois de valeurs extrêmes. Si l'échantillon simulé ne provient pas de telles lois, il est nécessaire de générer, à partir de celui-ci, un échantillon d'observations pouvant être considéré comme extrêmes. Pour ce faire, nous utiliserons la méthode dite des "paquets", utilisée par plusieurs auteurs comme, par exemple, Pickands III (1975). Cette méthode consiste en la formation de sous-ensembles (paquets) de couples  $(X_i, Y_i)$  de loi F, tous de même taille, et pour lesquels le maximum sur chacune des deux coordonnées sera seul retenu. Si par exemple, nous avons un échantillon de 2500 couples  $(X_i, Y_i)$ , on peut choisir de séparer les 2500 couples en 25 paquets de 100 couples  $(X_i, Y_i)$ , c'est-à-dire que le premier paquet sera formé des couples  $(X_i, Y_i)$  pour i = 1, ..., 100, le 2e paquet, des couples  $(X_i, Y_i)$  pour i = 101, ..., 200, et ainsi de suite. Sur chacun des 25 paquets, le maximum sur les  $X_i$  et le maximum sur les  $Y_i$  sont retenus, ce qui formera le couple  $(maxX_i, maxY_i)$ . Nous aurons ainsi au total 25 couples de maxima. C'est ce nouvel échantillon qui sera alors utilisé pour calculer l'estimateur de Capéraà et al. dénoté dans la suite par CFG.

#### 4.2.2 Méthode de Khoudraji

Nous avons vu à la Section 3.2 que, pour que l'estimateur proposé par Khoudraji soit valable, il est nécessaire de choisir un seuil r tel que les  $W_i$  et les  $R_i$ , où  $R_i > nr$ , soient indépendants, et tel que le nombre d'observations pour estimer convenablement A soit assez grand. Lors des simulations, nous avons remarqué que le nombre  $n^*$  d'observations  $(X_i, Y_i)$  pour lesquelles les  $R_i/n$  correspondants sont supérieurs à un seuil r était approximativement égal à  $\frac{2}{r}$ . Ceci peut s'expliquer de la manière suivante. Le processus ponctuel associé à  $\{\frac{(X_i, Y_i)}{n}, i = 1, ..., n\}$  tend vers un processus de Poisson non homogène sur  $R^{+2} \setminus \{0, 0\}$  dont l'intensité  $\mu$  est telle que, pour a > 0, (voir la Proposition 5.11 de Resnick, 1987)

$$\mu\{(x,y)\in R^{+2}: x+y>a\}=2/a.$$

On en déduit alors que, pour *n* assez grand et *r* pas trop proche de 0, le nombre  $n^*$  de  $R_i/n$  supérieurs à *r* est approximativement égal à  $\frac{2}{r}$ .

Pour les simulations que nous avons effectuées, plusieurs niveaux de seuil ont été choisis. Pour la première analyse, ayant simulé des échantillons de taille 2500 de copules Archimax, nous avons choisi les seuils 0.01, 0.04 et 0.08. Pour ces trois seuils, le nombre d'observations pour estimer  $A^*$  devrait être approximativement de 200, 50 et 25 respectivement. Nous aurons donc 3 estimateurs différents dénotés  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  correspondant au seuil 0.01, 0.04 et 0.08 respectivement. Dans la deuxième analyse, portant sur des échantillons de tailles 50 et 100 issus de lois de valeurs extrêmes, nous avons choisi pour chacune de ces tailles les seuils 0.1 et 0.2. Ainsi, pour estimer  $A^*$ , on aura approximativement 10 et 20 observations pour les échantillons de taille 50, et 20 et 40 pour les échantillons de taille 100. Nous notons  $K_1^*$  l'estimateur correspondant au seuil 0.1 et  $K_2^*$  celui correspondant au seuil 0.2.

Enfin nous avons vérifié dans les deux situations, et sur quelques échantillons, l'indépendance entre les  $W_i$  et les  $R_i$  en calculant le tau de Kendall. Par exemple, pour un échantillon particulier de taille 2500, nous avons obtenu les tau de Kendall suivants: -0.00954 (seuil de 0.01), -0.00421 (seuil de 0.04) et 0.00167 (seuil de 0.08), ce qui nous permet d'accepter l'hypothèse d'indépendance entre les  $W_i$  et les  $R_i$ .

#### 4.2.3 Méthode de Joe, Smith et Weissman

Dans la méthode de Joe et al. présentée à la Section 3.3, l'estimation de la fonction de dépendance  $A^*$  repose sur une moyenne des  $iT_{[i]}(\beta)$  pour lesquels les  $T_i(\beta)$  sont supérieurs à un certain seuil T. De plus, pour que cette méthode soit applicable, il est nécessaire que les valeurs  $iT_{[i]}(\beta)$  utilisées pour calculer cette moyenne soient approximativement constantes. Dans la première analyse portant sur des échantillons de taille 2500, plutôt que de choisir 3 seuils différents, nous avons décidé de conserver les 200, 50 et 25 plus grandes pseudo-observations  $T_i(\beta)$ , quel que soit  $\beta > 0$ . Ensuite, nous avons vérifié dans quelques cas, quelles étaient les valeurs  $iT_{[i]}(\beta)$  constantes. Par exemple, pour un échantillon particulier et pour  $\beta = 99$ , lorsque 200 pseudo-observations  $T_i(99)$ sont retenues, on vérifie aisément sur le graphique suivant que les 15 dernières valeurs  $iT_{[i]}(99)$  ne sont pas constantes.



Figure 4.1: Graphique des 200 valeurs  $iT_{[i]}(99)$  pour un certain échantillon.

Ainsi, les trois estimateurs choisis dans cette première analyse seront obtenus avec les moyennes tronquées suivantes  $\frac{1}{185} \sum_{i=16}^{200} iT_{[i]}(\beta)$ ,  $\frac{1}{35} \sum_{i=16}^{50} iT_{[i]}(\beta)$  et  $\frac{1}{10} \sum_{i=16}^{25} iT_{[i]}(\beta)$ . Ils seront dénotés  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$  respectivement. On peut remarquer que nous ne faisons pas dépendre de  $\beta$  le nombre de  $iT_{[i]}(\beta)$  composant ces différentes moyennes tronquées, ce qui est la solution proposée par Joe et al. que nous adoptons ici.

Dans la deuxième analyse portant sur des échantillons de taille 50 et 100 issus de lois de valeurs extrêmes, nous avons décidé de retenir les 20 et 10 plus grandes pseudoobservations  $T_i(\beta)$ . En agissant comme précédemment nous choisissons les deux estimateurs obtenus avec les moyennes tronquées  $\frac{1}{15}\sum_{i=6}^{20} iT_{[i]}(\beta)$  et  $\frac{1}{5}\sum_{i=6}^{10} iT_{[i]}(\beta)$  pour chacune des deux tailles d'échantillon. Ces estimateurs seront dénotés  $J_1^*$  et  $J_2^*$  respectivement.

### 4.3 Analyse de variance

Pour comparer les 3 méthodes d'estimation, soit celle de Capéraà et al., de Khoudraji, et de Joe et al., nous procèderons à l'étude de 2 analyses différentes. La première analyse

utilisera des observations de copules Archimax, tandis que la deuxième utilisera des observations de copules de valeurs extrêmes.

#### 4.3.1 Analyse 1

Dans cette analyse, les échantillons simulés proviennent de copules Archimax dont les fonctions de dépendance sont les mêmes que celles de leurs attracteurs  $C_{A^*}$ . Ces copules ont la forme suivante

$$C_{\phi,A^*}(x,y) = \phi^{-1}[\{\phi(x) + \phi(y)\}A^*\{\frac{\phi(x)}{\phi(x) + \phi(y)}\}],$$

où  $A^*$  est de l'un des 4 types suivants:

$$A_1^*(t) = \theta t^2 - \theta t + 1$$
, avec  $\theta = 0.3$ ,

$$A_{2}^{*}(t) = \begin{cases} \frac{15}{8}t^{2} - \frac{3}{4}t + 1 & \text{si } t \leq 1/5 \\ \\ \frac{1}{128}(15t^{2} - 6t + 119) & \text{si } t > 1/5. \end{cases}$$

$$A_3^*(t) = \theta t^2 - t + 1$$
, avec  $\theta = 0.668$ ,

$$A_4^*(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t^2 - t + 1 & \text{si } t < 1/3 \\\\ \frac{1}{8}(3t^2 - 2t + 7) & \text{si } t \ge 1/3, \end{cases}$$

où  $A_1^*$  et  $A_3^*$  sont symétriques et  $A_2^*$  et  $A_4^*$  asymétriques. Les paramètres ont été choisis de telle façon que  $\tau_{A_1^*} = \tau_{A_2^*} \approx 0.10$  et  $\tau_{A_3^*} = \tau_{A_4^*} \approx 0.26$ , ce qui donne deux forces de dépendance pour les attracteurs  $C_{A^*}$ .

Les générateurs  $\phi$  sont ceux de Clayton ( $\phi_1$ ) et de Franck ( $\phi_2$ ) définis à l'Exemple 4.1. Le paramètre  $\alpha$  a été calculé pour chacun de ces générateurs de telle façon que l'on obtienne  $\tau_{\phi_i,A_1^*} = 0.30$  et  $\tau_{\phi_i,A_2^*} = 0.50$ , pour i = 1, 2, où

$$\tau_{\phi,A^{\bullet}} = \tau_{A^{\bullet}} + (1 - \tau_{A^{\bullet}})\tau_{\phi} \tag{4.2}$$

et

$$\tau_{\phi}=1+4\int_0^1\frac{\phi}{\phi'}(t)dt.$$

Si l'on prend les mêmes valeurs de  $\alpha$  pour les copules Archimax  $C_{\phi,A_3^*}$  et  $C_{\phi,A_4^*}$  que pour  $C_{\phi,A_1^*}$  et  $C_{\phi,A_2^*}$ , alors d'après (4.2) nous ne pouvons pas vérifier  $\tau_{\phi_i,A_3^*} = 0.30$ , i = 1, 2, et  $\tau_{\phi_i,A_4^*} = 0.50$ , i = 1, 2. Nous allons plutôt choisir ce paramètre  $\alpha$  de façon à obtenir  $\tau_{\phi_i,A_3^*} = 0.50$  et  $\tau_{\phi_i,A_4^*} = 0.70$ . Ceci va nous permettre de voir l'influence de la force de dépendance des copules Archimax sur les estimateurs de  $A^*$ , dans chacun des cas  $\tau_{A^*} = 0.10$  et  $\tau_{A^*} = 0.26$ . Notons que les deux générateurs  $\phi_{i,\alpha}$ , i = 1, 2, étant tels que  $\phi_{i,\alpha}(1-1/t)$  est à variations régulières de degré -1, les copules Archimax  $C_{\phi_{i,\alpha},A^*}$  sont dans le domaine d'attraction de  $C_{A^*}$ .

Le Tableau 4.1 résume tous ces choix.

<i>τA</i> •	$A^*(t)$	$\phi(t)$	$\tau_{\phi,A}$ .
0.1	$A_1^*$	$\phi_{1,\alpha}$ avec $\alpha = 4/7$	0.30
0.1	$A_1^*$	$\phi_{1,\alpha}$ avec $\alpha = 1.6$	0.50
0.1	$A_1^*$	$\phi_{2,\alpha}$ avec $\alpha = 2.09$	0.30
0.1	$A_1^*$	$\phi_{2,\alpha}$ avec $\alpha = 4.8$	0.50
0.1	$A_2^*$	$\phi_{1,\alpha}$ avec $\alpha = 4/7$	0.30
0.1	$A_2^*$	$\phi_{1,\alpha}$ avec $\alpha = 1.6$	0.50
0.1	$A_2^*$	$\phi_{2,\alpha}$ avec $\alpha = 2.09$	0.30
0.1	$A_2^*$	$\phi_{2,\alpha}$ avec $\alpha = 4.8$	0.50
0.26	$A_3^*$	$\phi_{1,\alpha}$ avec $\alpha = 0.972$	0.50
0.26	A <b>*</b>	$\phi_{1,\alpha}$ avec $\alpha = 2.953$	0.70
0.26	$A_3^*$	$\phi_{2,\alpha}$ avec $\alpha = 3.23$	0.50
0.26	$A_3^*$	$\phi_{2,\alpha}$ avec $\alpha = 7.83$	0.70
0.26	A <b>*</b>	$\phi_{1,\alpha}$ avec $\alpha = 0.972$	0.50
0.26	A <b>*</b>	$\phi_{1,\alpha}$ avec $\alpha = 2.953$	0.70
0.26	A <b>*</b> _4	$\phi_{2,\alpha}$ avec $\alpha = 3.23$	0.50
0.26	A <b>*</b> _4	$\phi_{2,\alpha}$ avec $\alpha = 7.83$	0.70

Tableau 4.1: Valeurs du paramètre  $\alpha$  des générateurs  $\phi_{1,\alpha}$  et  $\phi_{2,\alpha}$ , et valeurs du tau de Kendall pour les copules Archimax correspondantes.

Nous avons donc deux plans d'expérience à trois facteurs, l'un correspondant à  $\tau_{A^*} = 0.10$  et l'autre à  $\tau_{A^*} = 0.26$ . Dans ces deux plans, les facteurs sont

1) Les 7 estimateurs retenus, les trois du type Khoudraji, les trois du type Joe et al. et celui de Capéraà et al.;

- 2) Deux fonctions de dépendance, l'une symétrique et l'autre asymétrique;
- 3) Les 2 générateurs avec chacun deux valeurs du paramètre  $\alpha$ .

Ces trois facteurs sont considérés comme des facteurs fixes, et pour chaque combinaison des niveaux de ces facteurs, 100 échantillons de taille 2500 ont été générés indépendamment. Pour l'analyse des données, nous procéderons à deux analyses de variance: la première utilisant comme variable dépendante la valeur du logarithme de la différence en valeur absolue entre l'estimation du tau de Kendall et la valeur du tau théorique, tandis que la deuxième utilisera la valeur du logarithme de  $L_1$ . L'utilisation de  $log|\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$  et de  $log(L_1)$  plutôt que de  $|\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$  et de  $L_1$  nous assure que l'on se trouve approximativement sous les hypothèses usuelles de l'analyse de variance. Remarquons toutefois que d'après les diagrammes en boîte de  $log(L_1)$  apparaissant à l'annexe A, l'estimateur  $K_1$  n'a pas la même variabilité que les autres. Nous le conservons quand même dans l'analyse. Nous ne présentons pas les diagrammes en boîte de  $log|\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$  qui sont semblables à ceux de  $log(L_1)$ .

Les analyses de variance effectuées sur les variables  $log|\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$  et  $log(L_1)$  montrent que les interactions de deuxième et troisième ordre, faisant intervenir le deuxième facteur, ne sont pas significatives au niveau 0.05 et que ce facteur n'a pas d'influence. Il existe par contre une interaction significative entre les estimateurs et les générateurs,  $\phi_{i,\alpha}$ , i = 1, 2, c'est-à-dire entre le premier et le troisième facteur (niveau de signification observé: 0.0001). Les résultats obtenus pour les comparaisons multiples effectuées au niveau 0.05 entre les 7 estimateurs, lorsque la variable dépendante est  $log|\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$ , sont résumés dans le Tableau 4.2, et ce pour chaque niveau du 3e facteur. Le symbole d'inégalité stricte signifie que les estimateurs sont significativement différents pour la variable réponse étudiée, tandis que le symbole  $\approx$  signifie que les estimateurs ne le sont pas.

φ de Clayton			
<i>τA</i> •	$\alpha = 4/7$	<i>α</i> =1.6	
0.10	$J_1 < K_3 < J_2 \approx J_3 \approx K_2 < CFG < K_1$	$J_1 < K_3 < J_2 < J_3 < K_2 < CFG < K_1$	
$\tau_{A^{\bullet}}$	α=0.972	<i>α</i> =2.953	
0.26	$J_1 \approx K_2 < K_3 < J_2 \approx J_3 < CFG \approx K_1$	$J_1 < K_2 \approx K_3 < J_2 \approx J_3 < CFG < K_1$	
	φ de Franck		
$ au_{A^{\bullet}}$	α=2.09	<i>α</i> =4.8	
0.10	$J_1 < J_3 \approx K_3 < J_2 \approx K_2 < CFG < K_1$	$J_1 \approx J_3 \approx K_3 < J_2 < CFG \approx K_2 < K_1$	
<i>τ</i> <sub>A</sub> •	α=3.23	<i>α</i> =7.83	
0.26	$J_1 \approx K_2 \approx K_3 < J_2 < J_3 < CFG < K_1$	$J_1 \approx J_2 \approx K_2 \approx K_3 < J_3 < CFG < K_1$	

Tableau 4.2: Comparaisons multiples des sept estimateurs de la fonction de dépendance A pour différentes copules Archimax, et pour  $\log|\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$ .

L'examen du tableau précédent permet immédiatement de constater que  $J_1$ , l'estimateur de Joe et al. avec le plus grand nombre de  $T_i(\beta)$  retenus, est le meilleur dans tous les cas examinés. Les autres estimateurs de Joe,  $J_2$  et  $J_3$ , semblent être comparables lorsque le générateur est de Clayton, à l'exception du cas où  $\alpha = 1.6$ ,  $J_2$  est alors plus précis que  $J_3$ . Lorsque le générateur utilisé est celui de Franck, on remarque que pour une force de dépendance petite,  $\tau_{A^*} = 0.10$ ,  $J_3$  semble être meilleur que  $J_2$ . Par contre, lorsque la force de dépendance devient plus grande,  $\tau_{A^*} = 0.26$ ,  $J_2$  domine  $J_3$ .

Pour ce qui est des trois estimateurs de Khoudraji,  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$ , on peut souligner immédiatement que celui possédant le plus petit seuil, r = 0.01, n'est pas un bon estimateur. Les deux autres,  $K_2$  et  $K_3$ , semble se comporter différemment lorsque la force de dépendance augmente. En effet, lorsque  $\tau_{A^*} = 0.10$ , l'estimateur  $K_3$  est toujours meilleur que l'estimateur  $K_2$ . Par contre, lorsque  $\tau_{A^*}$  devient plus grand,  $\tau_{A^*} = 0.26$ , les 2 estimateurs sont comparables pour la majorité des générateurs, à l'exception du cas où on utilise un générateur de Clayton avec  $\alpha = 0.972$ ,  $K_2$  étant alors meilleur que  $K_3$ . Si on compare maintenant ces deux derniers avec les estimateurs de Joe et al., on s'aperçoit qu'au moins un des estimateurs de Khoudraji,  $K_2$  ou  $K_3$ , est le plus performant après l'estimateur  $J_1$ .

L'estimateur de Capéraà et al., CFG, ne donne pas de bons résultats comparativement aux autres à l'exception de  $K_1$ .

Dans le tableau qui suit, on trouve les comparaisons multiples entre les 7 estimateurs pour chaque niveau du troisième facteur, lorsque la variable dépendante est  $log(L_1)$ .

	φ de Clayton		
$\tau_{A^{\bullet}}$	$\alpha = 4/7$	<i>α</i> =1.6	
0.10	$J_1 < J_2 \approx K_2 \approx K_3 < J_3 < CFG \approx K_1$	$J_1 \approx J_2 \approx K_3 < J_3 \approx K_2 < CFG < K_1$	
<i>τA</i> •	<i>α</i> =0.972	<i>α</i> =2.953	
0.26	$J_1 < K_2 < J_2 \approx K_1 \approx K_3 < CFG \approx J_3$	$J_1 \approx K_2 < J_2 \approx K_3 < CFG \approx J_3 < K_1$	
	φ de Franck		
<i>τA</i> •	<i>α</i> =2.09	<i>α</i> =4.8	
0.10	$J_1 < J_2 \approx K_2 \approx K_3 < J_3 < CFG < K_1$	$J_1 \approx J_2 \approx K_3 < J_3 < K_2 < CFG < K_1$	
$\tau_{A^{\bullet}}$	α=3.23	<i>α</i> =7.83	
0.26	$J_1 < J_2 \approx K_2 < K_3 < CFG \approx J_3 \approx K_1$	$J_1 \approx J_2 \approx K_2 \approx K_3 < J_3 < CFG < K_1$	

Tableau 4.3: Comparaisons multiples des sept estimateurs de la fonction de dépendance A pour différentes copules Archimax, à partir de  $log(L_1)$ .

En examinant le Tableau 4.3, il apparait que  $J_1$  est encore le meilleur estimateur. De plus,  $J_2$  est, pour tous les attracteurs, meilleur que  $J_3$ , celui-ci étant un estimateur pauvre dans la majorité des cas, en particulier lorsque  $\tau_{A^*} = 0.26$ . Ces résultats sont également soutenus par les diagrammes en boîte fournis à l'Annexe A. Encore ici, les estimateurs de Khoudraji,  $K_2$  et  $K_3$ , semblent avoir une certaine relation avec la force de dépendance. Lorsque  $\tau_{A^*} = 0.10$ , on remarque que  $K_3$  domine  $K_2$  dans la majorité des cas, tandis que pour  $\tau_{A^*} = 0.26$ ,  $K_2$  est meilleur que  $K_3$ . On note encore que les estimateurs CFG et  $K_1$  ne sont pas de bons estimateurs.

Les graphiques représentant les estimations de A pour  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $K_2$  et  $K_3$  ainsi que la fonction A théorique sont donnés à l'Annexe B. Ces graphiques confirment bel et bien

les conclusions précédentes sur ces estimateurs.

Suite à ces différentes analyses, on peut conclure que, lorsque l'échantillon d'observations n'est pas constitué de valeurs extrêmes, l'estimateur  $J_1$  de Joe et al. utilisant les 8% plus grandes pseudo-observations est nettement le meilleur estimateur parmi ceux étudiés ici. L'estimateur de Khoudraji, utilisé avec un seuil assez grand, peut aussi nous donner de bons résultats. Contrairement à la méthode d'estimation de Joe et al., le choix du seuil de l'estimateur de Khoudraji semble être un peu plus compliqué. En effet, les différentes analyses montrent que, pour obtenir un bon estimateur, le choix du seuil devrait tenir compte de la force de dépendance de l'attracteur. De plus, pour un seuil petit (0.01), l'estimation de A semble très mauvaise. Notons également que la condition exigeant l'indépendance entre les  $W_i$  et les  $R_i$ ,  $R_i > nr$ , n'est pas suffisante pour nous éclairer dans ce choix puisque, pour chaque valeur du seuil utilisée, cette condition avait été préalablement vérifiée.

#### 4.3.2 Analyse 2

Pour la deuxième analyse, nous avons simulé des observations provenant de copules de valeurs extrêmes. Nous avons effectué cette analyse pour de nouveau comparer les 3 méthodes d'estimation, mais surtout pour vérifier si l'estimateur de Capéraà et al. donnait de meilleurs résultats que les deux autres, étant donné que l'échantillon provient de valeurs extrêmes directement.

Pour comparer les estimateurs, nous avons considéré deux copules de valeurs extrêmes  $C_A$ , soit celle de Gumbel, symétrique par rapport à 1/2, dont la fonction de dépendance est donnée par

$$A_r^*(t) = \{t^r + (1-t)^r\}^{1/r}, \ r \ge 1,$$

et celle asymétrique de Tawn (1988), dont la fonction de dépendance est donnée par

$$A^*_{\alpha,\beta,r}(t) = 1 - \beta + (\beta - \alpha)t + \{\alpha^r t^r + \beta^r (1 - t)^r\}^{1/r}, \ 1 \le \alpha, \beta \le 1, \ r \ge 1.$$

Plus précisément, les deux copules de valeurs extrêmes qui ont été simulées sont sous

la forme

$$C_{A^*}(x,y) = exp[\{log(x) + log(y)\}A^*\{rac{log(x)}{log(x) + log(y)}\}]$$

où les fonctions de dépendance sont données par  $A^*_{\tau}$  ou encore  $A^*_{\alpha,\beta,\tau}$ .

Ensuite, nous avons choisi trois forces de dépendance pour ces  $A^*$ , soit  $\tau_{A^*} = 1/4, 1/2$ et 3/4, ainsi que deux tailles d'échantillon, 50 et 100. Afin d'obtenir les trois forces de dépendance voulues, nous avons déterminé les valeurs des paramètres r,  $\alpha$  et  $\beta$  que l'on peut trouver dans le tableau suivant.

$ au_A$ .	$A_r^*(t)$	$A^*_{\alpha,eta,r}$		
1/4	r=4/3	r=1.42 $(\alpha, \beta) = (0.78, 0.97)$		
1/2	r=2	r=2.58	(lpha,eta)=(0.78,0.97)	
3/4	r=4	r=50	(lpha,eta)=(0.78,0.97)	

Tableau 4.4: Valeurs des paramètres de la copule de Gumbel,  $A_r^*$ , et de la copule asymétrique de Tawn,  $A_{\alpha,\beta,r}^*$ , pour obtenir les différentes forces de dépendance.

Rappelons que dans cette analyse, nous comparons pour les trois forces de dépendance 5 estimateurs soit,  $J_1^*$ ,  $J_2^*$ ,  $K_1^*$ ,  $K_2^*$  et CFG (voir Section 4.2). Cette comparaison se fera selon un plan à quatre facteurs qui sont

1) Les 5 estimateurs, deux du type Khoudraji, deux du type Joe et al. et celui de Capéraà et al.;

- 2) Les 2 fonctions de dépendance,  $A_r^*$  et  $A_{r,\alpha,\beta}^*$ ;
- 3) Les 3 forces de dépendance,  $\tau_{A^*} = 1/4$ ,  $\tau_{A^*} = 1/2$  et  $\tau_{A^*} = 3/4$ ;
- 4) Les 2 tailles d'échantillon, 50 et 100.

Ces quatre facteurs sont considérés comme des facteurs fixes, et pour chaque combinaison de niveaux de ces facteurs, 100 échantillons ont été générés indépendamment. Comme pour l'analyse 1, nous procéderons à deux analyses de variance: la première utilisant la valeur du logarithme de la différence en valeur absolue entre l'estimation du tau de Kendall et la valeur du tau théorique comme variable dépendante, tandis que la deuxième utilisera la valeur du logarithme de  $L_1$ . L'utilisation de  $log|\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$ et de  $log(L_1)$  plutôt que de  $|\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$  et de  $L_1$  nous assure que l'on se trouve approximativement sous les hypothèses usuelles de l'analyse de variance.

L'analyse de variance sur la variable  $log|\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$  montre qu'il existe une interaction significative de troisième ordre (niveau de signification observé: 0.0101) entre le premier, le troisième et le quatrième facteur. De plus, l'interaction entre le deuxième et le troisième facteur est également significative (niveau de signification observé: 0.0001). L'analyse de variance sur la variable  $log(L_1)$  permet de voir qu'il existe une interaction significative de quatrième ordre. Les comparaisons des estimateurs seront effectuées sur chaque combinaison des niveaux des trois derniers facteurs.

Dans le Tableau 4.5, on trouve les résultats obtenus pour les comparaisons multiples au niveau 0.05 entre les 5 estimateurs, et ce pour chaque combinaison des niveaux des facteurs 2, 3 et 4, pour la variable dépendante  $log|\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$ .

	symétrie		
<i>τ</i> <sub><i>A</i></sub> .	N=50	N=100	
0.25	$CFG < J_1^* \approx J_2^* \approx K_2^* < K_1^*$	$CFG < J_1^* \approx J_2^* \approx K_1^* \approx K_2^*$	
0.50	$CFG \approx K_1^* < J_1^* \approx J_2^* \approx K_2^*$	$CFG < K_1^* < J_1^* \approx J_2^* \approx K_2^*$	
0.75	$CFG < K_1^* < J_1^* < J_2^* \approx K_2^*$	$CFG < J_1^* \approx K_1^* < J_2^* \approx K_2^*$	
	asymétrie		
$\tau_{A^{\bullet}}$	N=50	N=100	
0.25	$CFG < J_1^* \approx J_2^* \approx K_1^* \approx K_2^*$	$CFG < J_1^* \approx J_2^* \approx K_1^* \approx K_2^*$	
0.50	$CFG \approx K_1^* < J_1^* \approx K_2^* < J_2^*$	$CFG < J_1^* \approx K_1^* \approx K_2^* < J_2^*$	
0.75	$CFG \approx K_1^* < J_1^* \approx J_2^* \approx K_2^*$	$CFG < J_1^* \approx J_2^* \approx K_1^* \approx K_2^*$	

Tableau 4.5: Comparaisons multiples des cinq estimateurs de la fonction de dépendance  $A^*$  de différentes copules de valeurs extrêmes, pour différentes tailles d'échantillon N et pour  $\log |\hat{\tau}_{A^*} - \tau_{A^*}|$ .

L'étude du tableau précédent met clairement en évidence le fait que dans les cas con-

sidérés, l'estimateur CFG est le meilleur.

Pour ce qui est des estimateurs de Khoudraji,  $K_1^*$  et  $K_2^*$ , on remarque que, lorsque la force de dépendance est de 0.50 ou de 0.75,  $K_1^*$  est meilleur que  $K_2^*$ , à l'exception du cas où N = 100 avec une fonction de dépendance asymétrique. Pour ce cas, les estimateurs semblent être comparables. Par contre, lorsque la force de dépendance diminue, c'està-dire lorsque  $\tau_{A^*} = 0.25$ , on ne remarque pas de différence entre les 2 estimateurs, sauf peut-être lorsque N = 50 avec  $A^*$  symétrique,  $K_2^*$  étant alors meilleur que  $K_1^*$ . Encore ici, la performance des estimateurs de Khoudraji semble être reliée avec la force de dépendance. Soulignons également que le meilleur estimateur après celui de CFGest, pour tous les cas, un estimateur de Khoudraji.

Les estimateurs  $J_1^*$  et  $J_2^*$  donnent des résultats semblables pour tous les cas. Mentionnons par contre que, pour le cas où  $A^*$  est symétrique et  $\tau_{A^*} = 0.75$ ,  $J_1^*$  est meilleur que  $J_2^*$ , de même que pour le cas où  $A^*$  est asymétrique et  $\tau_{A^*} = 0.50$ .

Les résultats obtenus pour les comparaisons multiples portant sur la variable  $log(L_1)$ sur chaque combinaison des niveaux des facteurs 2, 3 et 4 sont présentés dans le tableau suivant.

	symétrie			
<i>τ</i> <sub>A</sub> .	N=50	N=100		
0.25	$CFG < J_2^* \approx K_1^* \approx K_2^* < J_1^*$	$CFG < J_1^* \approx K_1^* \approx K_2^* < J_2^*$		
0.50	$CFG < K_1^* < K_2^* < J_2^* < J_1^*$	$CFG < K_1^* < J_1^* \approx K_2^* < J_2^*$		
0.75	$CFG < K_1^* < K_2^* < J_2^* < J_1^*$	$CFG < K_1^* < K_2^* < J_1^* < J_2^*$		
	asymétrie			
$\tau_{A^{\bullet}}$	N=50	N=100		
0.25	$CFG < K_1^* \approx K_2^* < J_2^* < J_1^*$	$CFG < K_1^* < J_1^* \approx K_2^* < J_2^*$		
0.50	$CFG < K_1^* < K_2^* < J_2^* < J_1^*$	$CFG < K_1^* < J_1^* \approx J_2^* \approx K_2^*$		
0.75	$CFG < K_1^* < K_2^* < J_2^* < J_1^*$	$CFG < K_1^* < J_1^* \approx J_2^* \approx K_2^*$		

Tableau 4.6: Comparaisons multiples de cinq estimateurs de la fonction de dépendance  $A^*$  de différentes copules de valeurs extrêmes, pour différentes tailles d'échantillon N et pour  $log(L_1)$ .

Encore ici, il est évident que l'estimateur CFG est de loin le plus précis parmi les estimateurs étudiés. Ce résultat est également vérifié à partir des diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  fournis à l'Annexe C ainsi que des graphiques représentant les estimations de la fonction de dépendance et la valeur théorique de  $A^*$  fournis à l'Annexe D.

Si on examine les estimateurs  $K_1^*$  et  $K_2^*$ , on s'aperçoit encore que  $K_1^*$  est meilleur que  $K_2^*$  lorsque la force de dépendance est de 0.50 ou de 0.75, mais qu'ils deviennent comparables lorsque la force de dépendance est de 0.25. De plus, ces deux estimateurs dominent ceux de Joe et al.

Pour ce qui est de  $J_1^*$  et de  $J_2^*$ , on s'aperçoit que lorsque la taille d'échantillon est de 50,  $J_2^*$  est toujours meilleur que  $J_1^*$ , tandis que pour une taille d'échantillon de 100,  $J_1^*$  domine  $J_2^*$ .

On peut conclure par cette analyse que l'estimateur de Capéraà et al. est le meilleur estimateur lorsque les observations sont des valeurs extrêmes. De plus, l'estimateur de Khoudraji calculé avec un nombre suffisant d'observations peut aussi être un bon estimateur de la fonction de dépendance. Par contre, la méthode de Joe et al. est à proscrire pour ce type d'observations.

De ces deux analyses, portant sur des valeurs extrêmes et non extrêmes, nous retenons tout d'abord que l'estimateur de Capéraà et al. est l'estimateur à utiliser lorsque l'échantillon est constitué de valeurs extrêmes. Celui de Khoudraji peut aussi nous fournir de bonnes estimations pour ce cas, mais il est nécessaire de s'assurer que le nombre d'observations utilisées est suffisant.

Pour le cas où les observations ne sont pas extrêmes, l'estimateur de Joe et al. calculé avec les 8% plus grandes pseudo-observations  $T_i$  est sans aucun doute le meilleur. Celui de Khoudraji peut aussi nous permettre d'obtenir de bons résultats, mais le choix du seuil est difficile à déterminer puisqu'il semble que ce choix devrait être fait selon la force de dépendance de l'attracteur  $C_A$ .

## Chapitre 5

### Analyse de données

Dans le chapitre précédent, nous avons comparé différentes méthodes d'estimation de la fonction de dépendance, soit celles de Capéraà et al., de Joe et al., ainsi que de Khoudraji. Ces comparaisons ont été effectuées, dans un premier temps à partir de simulations d'échantillons provenant de lois bidimensionnelles ayant un attracteur donné, et dans un deuxième temps à partir de simulations d'échantillons de lois bivariées de valeurs extrêmes. Des deux analyses effectuées, nous avons conclu que l'estimateur de Capéraà et al. était nettement supérieur aux deux autres méthodes d'estimation, et ce lorsque l'échantillon de départ était constitué de valeurs extrêmes. Par contre, cet estimateur ne donnait pas de bons résultats lorsque l'échantillon utilisé était constitué de couples de lois bidimensionnelles. Pour ce cas, la première analyse du chapitre précédent a montré que l'estimateur de Joe construit avec les 200 plus grandes pseudoobservations  $T_i(\beta)$  était le meilleur. De plus, lorsqu'on compare les trois estimateurs de Khoudraji, ceux utilisant un seuil de 0.08 et de 0.04 donnent de meilleurs résultats que celui construit avec un seuil de 0.01.

Dans ce chapitre, nous appliquons ces estimateurs à un ensemble de données concernant des réservoirs d'eau utilisés pour produire l'électricité nécessaire à l'entreprise Alcan. Nous allons expliquer brièvement la façon dont sont obtenues ces données telle qu'elle est présentée dans le rapport "Validation des apports non contrôlés historiques" rédigé par l'Institut national de la recherche scientifique, INRS-Eau.

Les données représentent la quantité d'eau qu'un réservoir reçoit à l'état naturel durant un intervalle de temps déterminé. Cette quantité est appelée l'apport naturel. Cette valeur tient compte de différents paramètres comme les précipitations sur le réservoir, le ruissellement du bassin de drainage qui l'entoure, l'évaporation à sa surface et l'écoulement souterrain. Puisque ces différents paramètres ne peuvent être mesurés directement, Hydro-Québec utilise une équation qui permet de calculer l'apport naturel,  $A_n$ , appelée équation du bilan hydrique:

$$A_n = Q_{Av} - Q_{Am} + \delta S$$

où  $Q_{Av}$  représente les débits d'eau à la sortie du réservoir pendant 24 heures,  $Q_{Am}$ , les débits d'eau provenant d'un réservoir en amont pendant 24 heures et  $\delta S$ , la variation du volume stocké dans le réservoir pendant 24 heures.

Les apports naturels sont calculés sur près de 45 réservoirs majeurs, à des sites prédéterminés. Naturellement, ces mesures sont quelque peu entachées d'erreurs, qui peuvent être contrôlées par un procédé de filtrage des données, utilisé par Hydro-Québec. Pour notre étude, nous avons choisi d'utiliser les données des apports naturels sur les réservoirs Chute du Diable et Lac St-Jean car, selon Hydro-Québec, ces mesures contiennent moins d'erreurs que celles sur les autres bassins. Notre objectif est d'estimer non paramétriquement la fonction de dépendance de la loi bivariée des maxima des apports naturels de ces deux réservoirs. Cette estimation peut servir à choisir un modèle paramétrique pour cette loi. Les réservoirs sont représentés sur les cartes à l'Annexe E.

Les apports naturels sur ces deux bassins nous ont été fournis suivant deux ensembles. Le premier contient les maxima annuels des apports naturels pour une période allant de 1953 à 1994, tandis que le deuxième contient les valeurs journalières des apports naturels pour les années 1953 à 1993. Puisque les maxima des apports naturels ont été pris sur la période du printemps, soit du 1er avril au 30 juin, nous utiliserons seulement les valeurs journalières sur cette période.

A partir de ces données, nous utiliserons dans un premier temps, l'estimateur de Capéraà et al., qui sera calculé à partir de l'ensemble de données formé des maxima annuels des apports naturels. Nous obtiendrons ainsi l'estimation de la fonction de dépendance de la loi de ces maxima et également le tau de Kendall calculé à partir de cette estimation. Dans un deuxième temps, les estimateurs de Joe et al. et de Khoudraji seront appliqués à l'ensemble des données journalières des apports naturels. Nous obtiendrons ainsi les estimations de la fonction de dépendance de l'attracteur associé à ces données. Cependant, comme il est difficile de comparer graphiquement ces estimations, nous ferons ces comparaisons au moyen des tau de Kendall calculés à partir de ces estimations.

# 5.1 Estimation par la méthode de Capéraà, Fougères et Genest sur les apports naturels maximums des bassins de l'Alcan.

L'ensemble de données dont nous disposons est constitué des maxima annuels des apports naturels sur les années 1953 à 1994, ce qui forme donc un échantillon de 42 couples  $(X_i, Y_i)$  de valeurs extrêmes, où  $X_i$  représente le maximum sur les apports naturels journaliers pour l'année *i* sur le bassin "Lac St-Jean", et  $Y_i$ , le maximum pour la même année sur le bassin "Chute du Diable".

Nous allons estimer la fonction de dépendance de la loi de ces maxima bidimensionnels par la méthode proposée par Capéraà et al. Comme cette méthode est applicable essentiellement à des lois de valeurs extrêmes, nous allons tout d'abord vérifier que cet échantillon provient d'une des lois de ce type. Pour ce faire, nous utiliserons un test construit par Ghoudi, Khoudraji et Rivest (1997) décrit ci-dessous.

Soit  $\{(X_i, Y_i) : i = 1, ..., n\}$  un échantillon bivarié d'une loi H. Pour vérifier si H appartient à la famille des lois de valeurs extrêmes bidimensionnelles, il est nécessaire de s'assurer que la copule C, associée à H, appartient à la famille des copules de valeurs extrêmes, c'est-à-dire a la forme suivante

$$C(u,v) = exp[\{log(u) + log(v)\}A\{\frac{log(u)}{log(u) + log(v)}\}], 0 < u, v < 1,$$
(5.1)

où A est la fonction de dépendance que l'on veut estimer. Posons W = C(U, V). Si C(x, y) a la forme (5.1), alors  $8E(W) - 9E(W^2) - 1 = 0$ . Soit  $S_n$  une estimation nonbiaisée de  $8E(W) - 9E(W^2) - 1$  (voir Ghoudi et al., 1997, pour l'expression de  $S_n$ ). L'hypothèse  $H_0: C(x, y)$  a la forme (5.1), sera rejetée lorsque  $|S_n|/\{\hat{V}_{jack}(S_n)\}^{1/2} > z_{1-\alpha/2}$ , où  $\hat{V}_{jack}(S_n)$  représente une estimation de la variance de  $S_n$  obtenue par la méthode du jackknife et  $z_{1-\alpha}$ , le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la loi normale centrée réduite. Ainsi, on peut conclure que si l'hypothèse  $H_0$  n'est par rejetée, la copule Cappartient à la famille des copules de valeurs extrêmes. Pour obtenir les détails sur ce test, voir Ghoudi, Khoudraji et Rivest (1997).

En effectuant ce test sur l'ensemble de données composé des maxima annuels bidimensionnels des apports naturels journaliers, nous avons obtenu la valeur 1.95 pour  $|S_n|/\{\hat{V}_{jack}(S_n)\}^{1/2}$ , ce qui est légèrement inférieur au quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi normale centrée réduite lorsque  $\alpha$  est de 0.05. Ainsi n'ayant pas rejeté l'hypothèse  $H_0$ , nous pouvons conclure que la copule C associée à la loi bivariée de l'échantillon est une copule de valeurs extrêmes.

Puisque les lois marginales de cet échantillon ne sont pas connues, nous avons utilisé l'estimateur  $A_n^*(t)$  donné à la Section 3.1. Le graphique suivant montre l'estimation de la fonction de dépendance A.



Figure 5.1: Estimation de la fonction de dépendance A calculée sur l'ensemble des maxima par la méthode de Capéraà et al.

Nous savons que  $A_n^*(t)$  est un bon estimateur de la fonction de dépendance A d'une loi de valeurs extrêmes. Or le test effectué plus haut pour vérifier si l'échantillon des maxima provenait d'une copule extrême avait un seuil de signification observé très proche du seuil théorique de 0.05 que l'on s'était fixé. Aussi, ne savons-nous pas très bien si l'on a estimé la fonction de dépendance d'une loi des valeurs extrêmes. Cependant, on peut en avoir une idée en comparant les estimations du tau de Kendall obtenues, d'une part à partir de  $A_n^*(t)$ , et d'autre part à partir de l'échantillon des maxima. Denotons ces estimations par  $\tau_{A_n^*}$  et  $\hat{\tau}_n$  respectivement. On trouve  $\tau_{A_n^*} = 0.6310$  et  $\hat{\tau}_n = 0.7097$ . Comment comparer ces deux valeurs? Connnaissant la loi asymptotique de  $\hat{\tau}_n$  (Genest et Rivest, 1993), il est possible de déterminer un intervalle de confiance pour la valeur théorique  $\tau_A$  du tau de Kendall.

Cet intervalle, de niveau  $1 - \alpha$ , est construit de la façon suivante.

Soit  $(X_i, Y_i)$ , i = 1, ..., n, les couples de valeurs extrêmes. Posons

$$V_i = card\{(X_j, Y_j) < (X_i, Y_i)\}/(n-1)$$

 $\mathbf{et}$ 

$$W_i = card\{(X_j, Y_j) > (X_i, Y_i)\}/(n-1).$$

L'intervalle de confiance est le suivant:

$$\hat{\tau_n} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\gamma}_n}{n^{1/2}}$$

où  $\hat{\gamma}_n$  est l'estimateur de la variance de  $\hat{\tau}_n$  donné par (voir Genest et Rivest, 1993)  $\hat{\gamma}_n^2 = 16 \sum_{i=1}^n \frac{(V_i + W_i - 2\bar{V})^2}{n-1}$ , avec  $\bar{V} = \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{n}$ , et où  $z_{1-\alpha}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la loi normale centrée réduite.

L'intervalle de niveau  $1-\alpha = 0.95$  est alors [0.6155, 0.8040]. Puisque  $\tau_{A_n^*}$  est inclus dans cet intervalle, ceci suggère que l'estimation  $A_n^*$  est celle de la fonction de dépendance d'une loi des valeurs extrêmes. Cette estimation peut alors servir à ajuster un modèle paramétrique pour les maxima annuels.

# 5.2 Estimation par les méthodes de Joe et al. et de Khoudraji sur l'ensemble des apports naturels journaliers des bassins de l'Alcan

Dans cette section, nous allons calculer les estimateurs de Joe et al. et de Khoudraji sur les données journalières afin d'estimer la fonction de dépendance A des maxima annuels. Pour chaque année j, nous avons 91 données journalières  $(X_{ij}, Y_{ij})$  s'étalant du 1er avril au 30 juin, où  $X_{ij}$  représente l'apport naturel journalier sur le bassin Lac St-Jean, et  $Y_{ij}$ , l'apport naturel journalier sur le bassin Chute du Diable, pour le jour i à l'année j. Les méthodes de Joe et al. et de Khoudraji nécessitant un assez grand nombre de données puisqu'elles n'utilisent que les données supérieures à certains seuils, nous avons regroupé les années en quatre ensembles. Ainsi, les trois premiers ensembles seront formés des couples  $(X_{ij}, Y_{ij})$  représentant les données journalières du printemps pour les années 1953 à 1962, 1963 à 1972 et 1973 à 1982. Ces échantillons seront appelés respectivement échantillon 1,2 et 3. Le nombre total d'observations par échantillon sera donc de 910 couples de données, c'est-à-dire 91 couples  $(X_{ij}, Y_{ij})$  par année, et ce sur 10 ans. Le dernier échantillon, que l'on appellera échantillon 4, sera constitué des apports naturels journaliers pour les années 1983 à 1993, soit 91 couples  $(X_{ij}, Y_{ij})$  sur 11 ans, pour un total de 1001 couples de données. Les estimateurs de A seront donc calculés à partir de chacun des 4 échantillons de données pour chacune des méthodes d'estimation de Joe et al. et de Khoudraji.

#### 5.2.1 Estimateur de Joe et al.

Nous avons vu au chapitre précédent que l'estimateur noté  $J_1$  de Joe et al. utilisant les 8% plus grandes pseudo-observations  $T_i(\beta)$ , était le meilleur dans toutes les situations examinées. Aussi conservons-nous ici ce pourcentage. Le nombre  $\tilde{n}$  de  $T_i(\beta)$  retenus pour les 4 échantillons est donné par le Tableau 5.1. Rappelons de plus qu'une condition essentielle pour obtenir un bon estimateur consiste à vérifier si les valeurs  $iT_{[i]}(\beta)$  qui interviennent dans le calcul de la moyenne tronquée sont constantes. Ainsi le nombre  $\hat{n}$  d'observations que nous avons décidé de conserver pour calculer cette moyenne a été déterminé à partir des graphiques de la Figure (5.2) représentant les valeurs  $iT_{[i]}(99)$ , et ce pour les échantillons de couples 1, 2, 3 et 4 respectivement. Ce nombre  $\hat{n}$  apparait dans le Tableau 5.1.

n	ñ	ñ
910	73	63
1001	80	60

Tableau 5.1: Valeurs  $\bar{n}$  du nombre représentant les 8% plus grandes pseudo-observations  $T_i(\beta)$ , ainsi que les valeurs  $\hat{n}$  du nombre d'observations conservées pour le calcul de la moyenne tronquée, et ce pour chaque taille d'échantillon n.



Figure 5.2: Graphiques des valeurs  $iT_{[i]}(99)$  calculées pour les échantillons 1, 2, 3 et 4.

### 5.2.2 Estimateur de Khoudraji

Nous avons vu à la Section 3.2 que pour appliquer l'estimateur de Khoudraji, le seuil r devait être choisi de façon à ce que les  $W_i$  et les  $R_i$ ,  $R_i > nr$ , soient indépendants. Pour chacun des 4 échantillons de couples bivariés et pour chaque seuil utilisé, nous avons vérifié que cette condition était respectée en calculant les valeurs du tau de Kendall et en effectuant un test sur l'hypothèse  $H_0 : \tau = 0$  de niveau 0.05. Le Tableau 5.2 présente pour chacun des 4 échantillons, la valeur du tau de Kendall calculée entre les  $W_i$  et les  $R_i$  ainsi que le niveau de signification observé  $\hat{\alpha}$  du test  $H_0 : \tau = 0$ , et ce pour chaque seuil que nous avons utilisé. Ce tableau présente également le nombre  $n^{**}$  de  $W_i$  supérieurs aux différents seuils.

numéro de l'échantillon	r	$\tau$	â	n**
1	25/910	-0.05021	0.5395	70
2	25/910	0.02777	0.7320	71
3	25/910	0.00108	0.9891	75
4	25/1001	-0.05485	0.4743	79
1	50/910	-0.07000	0.5376	38
2	50/910	-0.08254	0.4788	36
3	50/910	0.04453	0.6897	39
4	50/1001	0.00971	0.9250	43
1	100/910	-0.2223	0.2376	16
2	100/910	0.02924	0.8611	19
3	100/910	-0.06719	0.6534	23
4	100/1001	-0.07368	0.6497	20

Tableau 5.2: Valeurs du tau de Kendall  $\tau$  calculé entre les  $W_i$  et les  $R_i$ , du niveau de signification observé  $\hat{\alpha}$  pour le test  $H_0: \tau = 0$  avec  $\alpha = 0.05$ , ainsi que du nombre n<sup>\*\*</sup> de  $W_i$  tel que  $R_i > nr$ , pour chacun des 4 échantillons.

Puisque  $\hat{\alpha}$  pour chaque seuil et pour chaque échantillon est nettement supérieur à 0.05,

on peut dire que les  $W_i$  et les  $R_i$  sont indépendants.

### 5.2.3 Résultats sur l'ensemble des apports naturels journaliers

Les graphiques présentés aux Figures 5.3 à 5.6 montrent les estimations de la fonction de dépendance obtenues par l'estimateur de Joe et al. et les trois estimateurs de Khoudraji, et ce sur les quatres échantillons respectivement.



Figure 5.3: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de l'échantillon 1 d'apports naturels journaliers, par l'estimateur de Joe et al. et les estimateurs de Khoudraji.



Figure 5.4: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de l'échantillon 2 d'apports naturels journaliers, par l'estimateur de Joe et al. et les estimateurs de Khoudraji.



Figure 5.5: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de l'échantillon 3 d'apports naturels journaliers, par l'estimateur de Joe et al. et les estimateurs de Khoudraji.



Figure 5.6: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de l'échantillon 4 d'apports naturels journaliers, par l'estimateur de Joe et al. et les estimateurs de Khoudraji.

Par ces graphiques, on peut immédiatement remarquer que l'estimateur de Khoudraji fournissant l'estimation de la fonction de dépendance la plus comparable à celle obtenue par la méthode de Joe et al. n'est pas le même pour tous les échantillons. En effet, pour l'échantillon 1, l'estimateur de Khoudraji avec un seuil de 50/910 semble être celui qui fournit l'estimation la plus similaire à celle de Joe et al. Par contre, pour l'échantillon 2 et 4, celui utilisant un seuil de 25/910 semble être le meilleur et enfin, pour l'échantillon 3, l'estimateur utilisant un seuil de 100/910 est alors le plus comparable.

Les Tableaux 5.3 à 5.6 représentent respectivement les valeurs du tau de Kendall calculées sur les 4 échantillons pour les différents estimateurs de Joe et al. et de Khoudraji.

Methode de Joe et al.	Methode de Khoudraj	
$ au_{\hat{A}}$	r	$ au_{ ilde{A}}$
0.674306187	25/910	0.7014584
	50/910	0.69319716
	100/910	0.74139605

Tableau 5.3: Valeurs du tau de Kendall obtenues pour les différentes estimations de la fonction de dépendance effectuées à partir de l'échantillon 1 pour les méthodes de Joe et al. et de Khoudraji.

Methode de Joe et al.	Methode de Khoudraji	
$ au_{\hat{A}}$	r	$ au_{ar{A}}$
0.584366387	25/910	0.615610123
	50/910	0.552635004
	100/910	0.487820362

Tableau 5.4: Valeurs du tau de Kendall obtenues pour les différentes estimations de la fonction de dépendance effectuées à partir de l'échantillon 2 pour les méthodes de Joe et al. et de Khoudraji.

Methode de Joe et al.	Methode de Khoudraji	
$ au_{ ilde{A}}$	r	$ au_{ar{A}}$
0.336900572	25/910	0.538896002
	50/910	0.438216808
	100/910	0.3408514767

Tableau 5.5: Valeurs du tau de Kendall obtenues pour les différentes estimations de la fonction de dépendance effectuées à partir de l'échantillon 3 pour les méthodes de Joe et al. et de Khoudraji.

Methode de Joe et al.	Methode de Khoudraji	
$ au_{\check{A}}$	Г	$ au_{\hat{A}}$
0.632425003	25/1001	0.609368303
	50/1001	0.5458161942
	100/1001	0.449695978

Tableau 5.6: Valeurs du tau de Kendall obtenues pour les différentes estimations de la fonction de dépendance effectuées à partir de l'échantillon 4 pour les méthodes de Joe et al. et de Khoudraji.

En examinant les tableaux précédents, on remarque que les estimations des tau de Kendall obtenues par la méthode de Joe et al. sont très différentes pour les 4 échantillons. La loi des maxima semble donc avoir changé au cours du temps, ce qui ne correspond en rien aux maxima annuels.

Pour ce qui est des estimateurs de Khoudraji, on peut voir que les tau de Kendall les plus proches de ceux obtenus par l'estimateur de Joe et al. ne sont pas les mêmes pour chaque échantillon. Ici encore, on remarque que les estimations des tau de Kendall les plus comparables à celles de Joe et al. sont atteintes lorsque le seuil est de 50/910 pour l'échantillon 1, 25/910 pour l'échantillon 2 et 4, et enfin 100/910 pour l'échantillon 3, ce que nous avions déjà noté à partir des graphiques précédents.

Nous remarquons aussi que plus la force de dépendance estimée par la méthode de Joe et al. semble être forte, plus l'estimation de A devient semblable pour les trois estimateurs de Khoudraji. A l'inverse, lorsque la force de dépendance diminue, les estimations de A par les méthodes de Khoudraji sont alors très différentes entre elles et de celle obtenue par la méthode de Joe et al.

En résumé, ayant pris l'estimateur  $J_1$  de Joe et al. comme référence, puisque d'après les résultats des simulations présentés au chapitre précédent il dominait les autres dans toutes les situations examinées, nous lui avons comparé ceux de Khoudraji. Il ressort de cette étude sur les données de l'Alcan que le choix du seuil pour appliquer la méthode de Khoudraji est très important mais difficile à faire. La raison en est que ce choix doit tenir compte de la force de dépendance de l'attracteur de la loi des observations, attracteur que l'on veut estimer. Aussi, tant que l'on n'aura pas trouvé une façon de choisir le seuil autre que celle s'appuyant sur l'indépendance entre les  $W_i$  et les  $R_i$ , nous suggérons d'estimer la fonction de dépendance A de l'attracteur par la méthode de Joe et al. utilisée dans la présente étude.

# Chapitre 6

## Conclusion

Dans ce travail, nous avons comparé trois méthodes d'estimation de la fonction de dépendance des copules de valeurs extrêmes bidimensionnelles, la première est une extension de celle de Capéraà et al., et les deux autres sont celles de Khoudraji et de Joe et al. Pour ceci nous avons envisagé les deux situations suivantes: soit nous disposons d'un échantillon d'une loi bidimensionnelle appartenant au domaine d'attraction d'une loi extrême, soit nous disposons d'observations de cette loi extrême. Dans la première situation, il ressort nettement de nos simulations que le meilleur estimateur est celui de Joe et al. utilisant les 8% plus grandes pseudo-observations  $T_i(\beta)$ . L'approche de Khoudraji donne de bons résultats mais on se heurte à la difficulté du choix du seuil qui doit être fait en fonction de la force de dépendance de la loi extrême que l'on ne connait pas. Son utilisation n'est donc pas recommandée dans ces conditions. L'estimateur de Capéraà et al. ne donne pas de bons résultats tel qu'appliqué dans cette première situation. A l'inverse, lorsque les données sont des maxima, l'estimateur de Capéraà et al. est le meilleur pour tous les cas que nous avons envisagés. Le comportement de l'estimateur de Khoudraji dépend encore de la force de dépendance de la loi extrême, mais dans cette situation il peut être appliqué car il est possible d'estimer cette dépendance directement à partir des observations. Quant à l'estimateur de Joe et al. il ne donne pas de bons résultats, cela étant dû probablement aux petits nombres de pseudo-observations retenues pour le calculer. Enfin, l'application de ces estimateurs aux données de l'Alcan

a montré encore une fois que les résultats obtenus par la méthode de Khoudraji étaient très différents selon le choix du seuil. Aussi, est-il nécessaire d'étudier une autre façon de déterminer le seuil pour appliquer avec succès cet estimateur.
### Bibliographie

- Bortkiewicz, L. von (1922). Variationsbreite und mittlerer Fehler. Sitzungsberichte Berliner Math. Ges. 21.
- Capéraà, P., Fougères, A.-L. & Genest, C. (1997a). A Nonparametric Estimation Procedure for Bivariate Extreme Value Copulas. *Biometrika*, 84, 3, 567-577.
- Capéraà, P., Fougères, A.-L. & Genest, C. (1997b). Bivariate distributions with extreme value attractors. Proposé au Journal of the American Statistical Association en février 1997.
- Deheuvels, P. (1979). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance. Bulletin de l'Académie royale de Belgique (Classe des Sciences).
- Deheuvels, P. (1984). Probabilistic aspects of multivariate extremes. In Statistical Extremes and Applications. J. Tiago de Oliveira (Ed.). Reidel, Dordrecht, 117– 130.
- Fisher, R. A. & Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 180-190.
- Galambos, J. (1987). The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics. 2nd ed., Kreir, Melbourne, FL.
- Genest, C. & Rivest, L.-P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas. Journal of the American Statistical Association, 1034-1043.

- Ghoudi, K., Khoudraji, A. & Rivest, L.-P. (1997). Propriétés statistiques des copules de valeurs extrêmes bidimensionnelles. La Revue Canadienne de Statistique, (souspresse).
- Haan, L. de (1985). Extremes in Higher Dimensions: The Model and Some Statistics. Proceedings of the 47th Session of the International Statistical Institute, Amsterdam: Holland, 1-16.
- Hildebrandt, T. H. (1963). Introduction to the theory of integration. Academic Press, New York.
- Joe, H., Smith, R. L. & Weissman, I. (1992). Bivariate threshold methods for extremes. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 54, 171-183.
- Khoudraji, A. (1995). Contributions à l'étude des copules et à la modélisation de valeurs extrêmes bivariées. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Canada.
- Mises, R. von (1923). Uber die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe. Sitzungsberichte Berlin. Math Ges. 22, 3.
- Mises, R. von (1954). La distribution de la plus grande de n valeurs. In Selected Papers II. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 271-294.
- Pickands III, J. (1981). Multivariate extreme value distributions. In Proc. 43rd Session I.S.I. (Buenos Aires), 859–878.
- Pickands III, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. Ann. Statist., 3 119-131.
- Resnick, S. I. (1987). Extreme Values, Regular Variation and Point Processes. Springer-Verlag, New York.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris, 8, 229–231.
- Tawn, J. A. (1988). Bivariate extreme value theory-models and estimation. *Biometrika*, 75, 397–415.

Tiago de Oliveira, J. (1984). Bivariate models for extremes. J. Tiago de Oliveira (Ed.). Reidel, Dordrecht, 859-878.

## Annexe A

## Diagrammes en boîte pour l'analyse

1



Figure A.1: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_1^*$  et  $\phi_{1,\alpha}$ ,  $\alpha = 4/7$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.2: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_1^*$  et  $\phi_{1,\alpha}$ ,  $\alpha = 1.6$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.3: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_1^*$  et  $\phi_{2,\alpha}$ ,  $\alpha = 2.09$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.4: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_1^*$  et  $\phi_{2,\alpha}$ ,  $\alpha = 4.8$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.5: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_2^*$  et  $\phi_{1,\alpha}$ ,  $\alpha = 4/7$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.6: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_2^*$  et  $\phi_{1,\alpha}$ ,  $\alpha = 1.6$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.7: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_2^*$  et  $\phi_{2,\alpha}$ ,  $\alpha = 2.09$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.8: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_2^*$  et  $\phi_{2,\alpha}$ ,  $\alpha = 4.8$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.9: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_3^*$  et  $\phi_{1,\alpha}$ ,  $\alpha = 0.972$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.10: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_3^*$  et  $\phi_{1,\alpha}$ ,  $\alpha = 2.953$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.11: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_3^*$  et  $\phi_{2,\alpha}$ ,  $\alpha = 3.23$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.12: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_3^*$  et  $\phi_{2,\alpha}$ ,  $\alpha = 7.83$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.13: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_4^*$  et  $\phi_{1,\alpha}$ ,  $\alpha = 0.972$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.14: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_4^*$  et  $\phi_{1,\alpha}$ ,  $\alpha = 2.953$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.15: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_4^*$  et  $\phi_{2,\alpha}$ ,  $\alpha = 3.23$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.



Figure A.16: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de 7 estimateurs de la fonction de dépendance d'une copule Archimax avec  $A_4^*$  et  $\phi_{2,\alpha}$ ,  $\alpha = 7.83$ , obtenus à partir de 100 échantillons de taille 2500.

## Annexe B

# Graphiques des estimations de la fonction de dépendance pour l'analyse 1



Figure B.1: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Clayton avec  $\alpha = 4/7$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_1^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.10$ .



Figure B.2: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Clayton avec  $\alpha = 1.6$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_1^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.10$ .



Figure B.3: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Franck avec  $\alpha = 2.09$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_1^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.10$ .



Figure B.4: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Franck avec  $\alpha = 4.8$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_1^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.10$ .



Figure B.5: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Clayton avec  $\alpha = 4/7$ , et où A<sup>\*</sup> est la fonction A<sup>\*</sup><sub>2</sub>, avec  $\tau_{A^*} = 0.10$ .



Figure B.6: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Clayton avec  $\alpha = 1.6$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_2^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.10$ .



Figure B.7: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Franck avec  $\alpha = 2.09$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_2^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.10$ .



Figure B.8: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Franck avec  $\alpha = 4.8$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_2^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.10$ .



Figure B.9: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Clayton avec  $\alpha = 0.972$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_3^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.26$ .



Figure B.10: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Clayton avec  $\alpha = 2.953$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_3^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.26$ .



Figure B.11: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Franck avec  $\alpha = 3.23$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_3^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.26$ .



Figure B.12: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Franck avec  $\alpha = 7.83$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_3^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.26$ .



Figure B.13: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Clayton avec  $\alpha = 0.972$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_4^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.26$ .



Figure B.14: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Clayton avec  $\alpha = 2.953$ , et où A<sup>\*</sup> est la fonction A<sup>\*</sup><sub>4</sub>, avec  $\tau_{A^*} = 0.26$ .



Figure B.15: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Franck avec  $\alpha = 3.23$ , et où  $A^*$  est la fonction  $A_4^*$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.26$ .



Figure B.16: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 2500 d'une copule Archimax, où le générateur  $\phi$  est celui de Franck avec  $\alpha = 7.83$ , et où A<sup>\*</sup> est la fonction A<sup>\*</sup><sub>4</sub>, avec  $\tau_{A^*} = 0.26$ .

## Annexe C

## Diagrammes en boîte pour l'analyse

2



Figure C.1: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une loi de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où r = 4/3 avec  $\tau_{A^*} = 0.25$ .



Figure C.2: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une loi de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où r = 2 avec  $\tau_{A^*} = 0.50$ .



Figure C.3: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une loi de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où  $\tau = 4$  avec  $\tau_{A^*} = 0.75$ .



Figure C.4: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une loi de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où r = 4/3 avec  $\tau_{A^*} = 0.25$ .



Figure C.5: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une loi de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_{\tau}^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où r = 2 avec  $\tau_{A^*} = 0.50$ .



Figure C.6: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une loi de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où  $\tau = 4$  avec  $\tau_{A^*} = 0.75$ .



Figure C.7: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une loi de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 1.42, avec  $\tau_{A^*} = 0.25$ .



Figure C.8: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une loi de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 2.58, avec  $\tau_{A^*} = 0.50$ .



Figure C.9: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une loi de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 50, avec  $\tau_{A^*} = 0.75$ .



Figure C.10: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une loi de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 1.42, avec  $\tau_{A^*} = 0.25$ .



Figure C.11: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une loi de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 2.58, avec  $\tau_{A^*} = 0.50$ .



Figure C.12: Diagrammes en boîte des erreurs  $log(L_1)$  de cinq estimateurs de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une loi de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 50, avec  $\tau_{A^*} = 0.75$ .

#### Annexe D

# Graphiques des estimations de la fonction de dépendance pour l'analyse 2



Figure D.1: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une copule de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où r = 4/3, avec  $\tau_{A^*} = 0.25$ .



Figure D.2: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une copule de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où r = 2, avec  $\tau_{A^*} = 0.50$ .



Figure D.3: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une copule de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où r = 4, avec  $\tau_{A^*} = 0.75$ .



Figure D.4: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une copule de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où r = 4/3, avec  $\tau_{A^*} = 0.25$ .



Figure D.5: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une copule de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où r = 2, avec  $\tau_{A^*} = 0.50$ .



Figure D.6: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une copule de valeurs extrêmes de Gumbel  $A_r^*$ , symétrique par rapport à 1/2, où r = 4, avec  $\tau_{A^*} = 0.75$ .



Figure D.7: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une copule de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 1.42, avec  $\tau_{A^*} = 0.25$ .



Figure D.8: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une copule de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et  $\tau = 2.58$ , avec  $\tau_{A^*} = 0.50$ .



Figure D.9: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 50 d'une copule de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 50, avec  $\tau_{A^*} = 0.75$ .



Figure D.10: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une copule de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 1.42, avec  $\tau_{A^*} = 0.25$ .



Figure D.11: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une copule de valeurs extrêmes asymétrique  $A^*_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 2.58, avec  $\tau_{A^*} = 0.50$ .



Figure D.12: Estimation de la fonction de dépendance, obtenue à partir de 100 échantillons de taille 100 d'une copule de valeurs extrêmes asymétrique  $A^{\bullet}_{\alpha,\beta,r}$ , où  $\alpha = 0.78$ ,  $\beta = 0.97$  et r = 50, avec  $\tau_{A^{\bullet}} = 0.75$ .

### Annexe E

## Cartes représentant les réservoirs Chute du Diable et Lac St-Jean
Carte 1



Vue en perspective du système hydroélectrique Atcan au Saguenay-Lac-St-Jean.

Carte 2



### Annexe F

## Programmes informatiques de fortran 77 utilisés pour l'analyse 1

LANNE PRINCIPAL CALCULART LES VALEONS DU TAG DE EDMOALL ET DE L'EXTERN Des setuations de la fonction à par les methodés de jug et al., de Denati, et de carfina et al., a fantir d'eccemptillos de taile asso Le Anchenax, ou le tau de endoall theorique de la fonction a set 0.1 **L** L restance. Co is the la final reduction for the final of the final reduction of the final of ido enddo cali erill(Astarn1.erreuril) do 1=1,q erreurill(3,1)=erreuril(1) enddo do lel.g 2 cil ARPCAll(depart, xvec(nDobe), yvec(nbobe)) cil kbolo0(xvec, yvec, tau(j, l), Astarn) cil kbolo0(xvec, yvec, tau(j, l), Astarn) endo endo call erril2(Astarni, erreuril) de 1=1.q q erreurlli(j,l)=erreurll(l) endio coli erril2(Astarni, erreafil) de lei,q erreafil(j,l)=erreafil(l) andda andda enddo cml1 erril3(Astarni.errouril) do 1=1.g errouril1(j,1)=errouril(1) encido do 1=1.q do l=1.q j=5 call AMPCall(depart, xwec(nbobs).ywec(nbo call joe200(xwec,ywec,tsu(j,l),Astarn) do ind=1.d=1 Astarn1(ind,l)=Astarn(ind) bas 1 I enddo enddo enddo call errll2(Astarn1,erreuril) do l=1,q erreuril1(j,l)=erreuril(l) enddo call errill(Astarni.errwurLl) do 1+1.g errwurLl([].l)\*errwurLl(1) enddo do 1=1.g do let.g
j=7
call MMPCall(depart.svec(nbobs).yvec(nbobs))
call jos2(svec,yvec.tau(j,l),Astarn)
do ind=1,d=1
Astarn1(ind,l)=Astarn(ind) endin call erril2(Asterni.erreuril) do l=1.g erreuril)(j.l)=erreuril(1) endde cell erril2(Astarni, arrauril) do 1=1.q erreurili(;,1)verreuril() enddo do 1=1,g do Lei, g je9 call AMPCal4(depart.xvec(nhohe),yvec(nhohe)) call kbol00(nvec.yvec,tau(j,l),Astarn) do ind=1.d=1 meta meta mddo mddo call eril2(Astani.srrmii) do lei.q srrmrii(j.l)errmii(i) enddo do l=1.q q j=10 call ANPCal4(depart, xvec(nbobs), yvec(nbo call kho25(xvec, yvec, tau(j, l), Astarn) do ind=1.d-1 Astern1(ind,1)+Astern(ind) enddo call eril2(Astarni, erreuril) do 1=1,q erreuril(),1) =erreuri()) enddo do 1=1,q do 1=1, q =11 AMPCal4 (dapart, xvec (nbobs), yvec (nbobs)) cal1 AMPCal4 (dapart, xvec (nbobs), yvec (nbobs)) do Indel, d-1 do Indel, d-1 math Attacnhi (ind, 1) \*Astarn (ind) ndiche ndiche endio call erril2(Astarn1, errouril) de 1=1,q errouril1(j,l)=errouril(1) andda

do l=1.q j=13 c=11 AHPCal4(depart.svec(nbobs).yvec(nbobs)) cal1 joel00(svec.yvec.tau(j.l).Astarn) do indel.d=1 Astarn1(ind.l)=Astarn(ind) enddo call erril2(Astarn1, errouril) do 1=1,q errouril1(j,1)=errouril(1) enddo do let.g -j=13 csi1 AMPCal4(dapart.xvec(nbobs).yvec(nbobs)) csi1 Joed0(xvec,yvec.tau(j.l).Astarn) do leds1.d=1 Joed0(xvec,yvec.tau(j.l).Astarn) do leds1.d=1 Joed0(xvec,yvec.tau(j.l). endio endio call eril3(Astarni, erreuril) do lei.g erreuril(j,l)=erreuri(l) andou du 1=1.0 enddo enddo call erril2(Apterni, erreuril) do Lei,g erreuril(j,l)-erreuri(l) call khol00(xvec,yvec,tm(j,l).Astarn) do indel.d=l Astarni(ind.l)=Astarn(ind) do l=1, q
 erreuril(j, l)=erreuril(l) enulda de l=1.q ndda endo call erril2(Astarni,erreuril) do 1=1.q erreuril1(j,1)=erreuril(1) enddo do let.g enome call erril2(Astarni,erreuril) do lel,q erreuril(j,l)=erreuril(l) anddo do l=1.q do i=1.q j=19 call ANT=L1(depart, rvec(nbobs), yvec(nbobs)) call jos200(rvec, yvec.tau(j,1),Astarn) do ind=1.d=1 Astarni[ind, l)=Astarn(ind) encos call erril2(Astarni, errouril) do lel,q errouril1(j,l)=errouril(j) ) erene cell erril2(Astarni,erreurLi) do 1=1,q erreurLi1(j,1)=erreurLi(i) anadda da l+1.g do le1.g j=11 call Asfall(depart, xVec(nbobs), yvec(nbobs)) (call joel5(svec, yvec, tau(), 1), Astarn) do inde1.d-1 ind. Astarn1(ind, 1)=Astarn(ind) endión endión endio call erril2(Asterni, errouril) do 1=1,q streutil(j,1)=errouril() enddo cali erril2(Astarni.erreuril) do lei.g ... erreuril1(j.l)+erreuril(l) enddo do lel.q j=21 call Aufbald(depart.rvec(nbobs).yvec(nbobs)) call khol00(zvec.yvec.taw(j.1).Astarn) do indsld-1 Astarnl(ind,l)=Astarn(ind) enddo enddo cill erril2(Astarni,erreuril) do lel,g erreuril(j,l)=erreuril(l) enddo do lel.g je24 call AMPalé(depart,xvec(nbobe),yvec(nbobe)) call Xbn25(xvec,yvec,tau(j,1),Astarn) do indel.d=1

Asterni(ind, 1)=Astern(ind) call erril2(Astarni, errouril) do 1=1.0 q
errourL11(j,l)+errourL1(l) enddo do 1=1.g do i=1,q
j=23
call AMPal&(depart, xwec(nbobs), ywec(nb
call CFGI5(xwec, ywec, t&u(), 1), Astarn)
do ind=1,d=1
cal\_ Astarn(ind, 1)=Astarn(ind) 11 enddo enddo call erril2(Astarni.erreuril) do 1=1.q erreuril1(j.l)=erreuril(1) enddo do l=1.q j=16 call AKFal4(depart.xvec(nboba),yvec(nboba)) call jool00(xvec,yvec,tau(j,l),Astarn) do ind=1.d-1 Astarn1(ind,l)=Astarn(ind) endin call erril2(Astarn1.erreurL1) do 1=1.q erreurL11(j.1)=erreurL1(1) effbass... enddo do l=1.q j=37 call ANT/al4(depart.rvec(thobs),yvec(hbobs)) call pedD(tvec,yvec,tau(j,i),Astarn) do inde1,d-1 Agtarn1(ind,1)=Astarn(ind) enddo call erril2(Astarni.erreurL1) do l=1.q erreurL12(1.1)=erreurL1(1) enddo do lel.q j=26 call AMPal4(depart.rvec(nbobs).yvec(nbo call joel5irvec,rvec.taw().}).Astarn) do indel.d-l Astarnl(ind,l)=Astarn(ind) call erril2(Astarni.erreuril) ds I=1.q r erreurLl1(j.l)=erreurLl(l) do 1=1.q do l=1.q j=23 call AlPCall(depart.xvec(nboba).yvec(nboba)) call kbol00(xvec,yvec.tau(j,l).Astarn) do ind=1.d=1 Astarn(ind,l)=Astarn(ind) enddo enddo cali erril(Astarni.erreuril) do 1=1.q erreuril(j,1)=erreuril(1) enddo enddo do lel.q j=16 call AlfCall(depart.svec(nbobs),yvec(nbobs)) call khol00(xvec,yvec,tau(1,1),Astarn) do indel.d-1 Astarn1(ind,1)=Astarn(ind) encos call erril(Astarni,erreurLi) do 1=1,q erreurLi1(j,1)=erreurL1(1) dFTWname.... enddo feldo lel.q j=ll call APCall(depart, xvec(nbobs), yvec(nbobs)) call kbol5(xvec, yvec, tau(j, l), Astarn) do indel.d-l Astarnl(ind, l)=Astarn(ind) ... Attantion of the second Asta... enddo endd call errl](Astarn1,erreurL1) do lel.g erreurL1(),1)=erreurL1(1) do 1=1.4 j=33 call AlPCall(depart, xvec(nbobs), yvec(nbol call jos200(xvec, yvec, tau(j,l), Astern) do ind=1.4-1 Asternillot, 1=Asternilmi) ha)} enddo enddo call eril(Astarni,erreufil) do l-1,q erreufil(j,l)=erreufil(l) ABLENCE enddo coddo coll erij(Astarni.ersuril) do l=1.q ersuril(j,1)=ersuri(1) ABE::... enddo enddo call erij(Astarni,erreuril) do l=l,g erreuril(j,l)+erreuril(l) effuered enddo do l=1.q \_=14 AJPCal4(depart.xvec(nbobs).yvec(nbo cal1 Abol00(xvec,yvec.tau(j.1).Astarn) do ind=1.d=1 Astarn1(ind,1)=Astarn(ind) call erri3(Astarni.erreuril) do 1=1.q errourL11(1,1) =errourL1(1)

enddo do lel.g jel7 call AJPCal4(depart,xwec(nhobe),yw call AJPCal4(depart,xwec(nhobe),yw etal call khol00(xvec.yvec.tau(j,l).Astarn) do ind=1,d=1 Astarn1(ind.l)=Astarn(ind) call art do 1-1.0 eri3 (Asterni , erreurii) erreurLl(j,l)=erreurLl(l) enddo do lel.g jel8 call AlPCal4(depart.xvec(mbobs),yvec(mbobs)) call AlPCal4(depart.xvec(mbobs),yvec(mbobs)) do indsl.d-l Astarni(ind.l)=Astarn(ind) encips encips call stril(Astarni, strearLi) do 1=L.q erreurLi1(j,1)=erreurLi(1) enddo do lai.g j=19 call AlPCal4(depart.svec(nbobe).yvec(nbobe)) do indel.dl CPU35(svec.vvec.tau(j.l).Astarn) do indel.dl Astarni(ind.l)=Astarn(ind) enddo call er do 1=1, errij(Astarni, erre erreurill(j.l)=erreuril(l) GLITHERSE endin do lei.q 140 call AlPCal4(depart.svec(nbobs).yvec(nbobs)) call (depart.svec(nbobs).yvec(nbobs)) do indeld-1 (depart.svec(nbobs).yvec(nbobs)) do indeld-1 (depart.svec(nbobs).yvec(nbobs)) Astarni(ind, l)=Astarn(ind) enddo enddo call eril(Astarni,erreufl) do lel.g erreufli(j,i)=erreufl(i) #Trues\_ enkio de l=1.q \_s41 AlPCal4(depart.xvsc(nhabs).yvsc(nbc \_s11 AlPCal4(depart.xvsc(nbabs).yvsc(nbc \_s11 AlpCal4(depart.xvsc(nbabs).yvsc(nbbs).yv enddo cmil err do 1=1.0 erril (Astarni, errouril) erreurLl1(j.l)=erreurLl(l) enden do l=1.g do lel.q j=42 call AJPCal4(depart,xvec(nbdbs),yvec(nb call jo425(xvec,yvec,tau(j.1).Astarn) do indel.d-1 Astarni(ind,1)=Astarn(ind) ... enddo call errij(Astarni.errean do l=1.q erreurLl(j,1)=erreurLl(l) enddo
do lel.g
jedl
call AJFall(depart.svec(nbobs).yvec(nbobs))
call kbo200(svec.yvec.tau().l).Astarn)
do ind=ld=l
Astarni(ind, l)=Astarn(ind)
...dag endio call erri3(Astarni,essa.... do l=l.q erreurLl(j,l)\*erreurLl(l) enddo do lel.g call AJFall(depart, svec(sbobe), yvec(sbob call ABFall(depart, svec(sbobe), yvec(sbob call ABFall(log), yvec(sbob), svec(sbob), svec(sbob do inde), defamil(ind, l)=Astarn(ind) enddo
call erril(Astarn1, erreurL1)
do lel,q
erreurL1(j,l)=erreurL1(1) enddo do l=1.q j=45 call AlPal3(depart.rvec(nbobs).yvec(nbobs)) call AlPal3(depart.rvec(nbobs).yvec(nbobs)) call AlPal3(depart.rvec(nbobs).yvec(nbobs)) do ind=1.d=1 Asterni(ind,l)=Astern(ind) enddo enddo cali ertli(Astarni.erreurLl) do l=l,q erreurLil(j,l)=erreurLl(i) enddo call erril(Astarni.erreurLl) do l=1,q erreurLl(j,l)=erreurLl(l) enddo do l=1,q j=47 call AJFs13(depart.rvsC(nbobs),yvsC(nbob call jos200(zvsC,yvsC,tau(j,l),Astarn) do ind=1,d=1 Astarn1(ind,l)=Astarn(ind) enddo call erril(Astarn1.errwurL1) do l=1,g errwurL1(j,1)=errwurL1(1) enddo do 1=1.g do i=1,q
 j=48
 call AlFall(depart.rvsc(nbobs),yvsc(nbobs))
 call AlFall(depart.rvsc(nbobs),yvsc(nbobs))
 call ges0(rvsc,yvsc,tau(j,l),Astarn)
do ind=1,d=1
 Astarn1(ind,l)=Astarn(ind) endio call errll(Astarni.erreurll) do lel.q erreurll(j,l)=erreurl(1) enddo do 1=1,q i j=49 call A37al3(depart.xvsc(nbobs).yvsc(nbob call joe25(xvsc,yvsc,tau(j,l),Astarn) 

-

do ind=1.d=1 Accessi (ind. 1)=Access (ind) enddo call errll(Astarn1.srrwn..... do 1=1.q srrwarill(j.1)=srrwaril(1) enddo do 1=1.g u. enddo call errli/Asterni.erreurLi) de !=[.q erreurLi1(;.l)=erreurL1(l) enden enden j=1 j=1 call AlPald(depart.svec(nbobs).yvec(nbobs)) call kbol00(nvec.yvec.Law(j.l),Astarn) do ind=1.d=1 Astarnl(ind,1)=Astarn(ind) chico chi errij(Astarni,erreurLi) do l=1,q erreurLi(j,1)=erreurLi(1) 0fTBMLister: endds 0 l=1.q j=52 coll ADFald(depart.xvec(nbobs).yvec(nbobs)) coll khol5(zvec,yvec,tau(j,l).Astarn) ds ind=1.d-1 Astarn1(ind,l)=Astarn(ind) call erri3(Asterni,erreurii) do 1=1.q erreurLl1(j.1) = erreurL1(1) endén call erril(Astarni.erreur.... do l=1.g erreuril1(j,1)=erreuril(1) enddo enddo isl.q isl4 csl1 AlFal4(depart.xvec(nbobs),vvec(nbobs)) csl1 AlFal4(depart.xvec(nbobs),vvec(nbobs)) do inde.id=1 do inde.id=1 Astarn1(ind.1)=Astarn(ind) do ... enddo enddo call eril(Astarni.erreurL1) do l=1; erreurL11(j,1)=erreurL1(1) encido encido enddo cali erril(Astarni,erreuril) do lel.g «Creurill(j,l)=erreuril(l) enddo enddo d l=1.q j=54 call AJP214(depart.xvec(nbobs),yvec(nbo call AJP214(depart.xvec(nbobs),yvec(nbobs),yvec(nbo call AJP214(depart.xvec(nbobs),yvec(nbobs), enddo enddo cali eril(Artsrni.ermurLi) do lei.g erreurLl(),l)=erreurLl(1) s errLiber())=0.d0 errLicer()=0.d0 tauber()=0.d0 EQM()=0.d0 endedo do j=1.54 do 1=1.q errfiber(j)=errfiber(j)+(errewrfil(j,1)/q rewber(j)=found(j)+(errewrfil(j,1)-~2) rewber(j)=found(j)+(tew(j,1)-(euster)-\*2)/q EQM(j)=EQM(j)+(tew(j,1)-(euster)-\*2)/q do j=1.56
write(2,1003) taubar(j).808(j).ertLiber(j).ertLiber(j)
format(4(12, P17.12)./) 1003 1006 closs(1) closs(2) end PACHABASE PAIRCIPAL CALCULARY LES VALENAS DU TAU DE REMOALL ET DE L'ERRETE LI POOR DES EPITAMITORS DE LA PORCTION A PAR LES ESTRONS DE JUE ET AL., BE POOR DES EPITAMITORS DE LA PORCTION A PAR LES ESTRONS DE JUE ET AL., BE COPULE AFACTINAS, OU LE TAU AL., APARTID ACHABATILLOS DE TALLEZ SOD DE UNCLUS DE COMMUNICATION DE LA PORCTION A EST 0.257 UNCLUS (COMMUNICATION DE LA PORCTION A EST 0.257 INCLUS (COMMUNICATION DE LA PORCTION DE LA PORCTION A EST 0.257 INCLUS (COMMUNICATION DE LA PORCTION DE LA PORCTION A EST 0.257 INCLUS (COMMUNICATION DE LA PORCTION DE LA PORCTION A EST 0.257 INCLUS (COMMUNICATION DE LA PORCTION DE LA PORCTION A EST 0.257 INCLUS (COMMUNICATION DE LA PORCTION DE LA PORCTION A EST 0.257 INCLUS (COMMUNICATION DE LA PORCTION DE LA PORCTION A EST 0.257 INCLUS (COMMUNICATION DE LA PORCTION DE LA PORCTIONALI (COMMUNICATION DE LA PORCTIONAL DE LA PORCTIONAL

do ind=1.d-1 Astarn1(ind,1)=Astarn(ind) endio cali erril(Astaril.erreuril) do 1=1.q erreuril(j,1)=erreuril(1) endin do 1=1.g s j=2 call AMPCall(depart,avec(nbobs).yvec(nbobs)) call bhold(avec,yvec,tss(j,l).Astarn) ds ind=1.d-1 Asterniind, 1:-Asterniind) Asterni(ind, i)-Astern endio cmli wrfl(Asterni, errouri)) do l=1.q q eroufili(j.1)=errmafil(1) endda da i-i.a dm l=1.c j=3 call AMPCall(depart,xvmc(nbobe).yvmc(nb call bho25(xvwc,yvmc,tmu(j,l).Astarn) do ind=1,d-1 Amtarn1(ind,l)=Astarn(ind) enddo enddo cali eril(Astarni,errwurii) do lel.g errwurii(j,1)=errwurii(1) [ 5=4 call ANPCall(depart.wee(nbobs).yvec(nbo call GFG25(xvec,yvec,tau(),1),Astarn) i,d=1 Astarn1(ind,1)=Astarn(ind) endido endido endoc call erril(Astarni,erreuril) do lel.o erreurili(j,l)=erreuril(l) endio call erril(Astarni.errwuril) do J=1.q errwuril(1,1)=errwuril(1) endidu
do lel.q
f=6
call AMPCall(depart.xvacinboba).yvac(nboba);
do indelid.l] (depart.xvacinboba).yvac(nboba);
do indelid.l] (depart.xvac.tau(j.l).Astarn)
do indelid.l] (depart.xvac.tau(j.l).astarn);
do indelid.l] (depart.xvac.tau(j.l).asta Abu--enddo enddo call erril(Ascarni.errmuril) do i=1.q errmuril((j,i)=errmuri(1) endido endido do 1=1,q d0 i=1.g c11 AMPCall(depart.rvsc(nbobs).yvsc(nbobs); c11 d0025(rvsc,yvsc,tau(),1).Astarn) d0 ind=1.d-1. Astarn1(ind,1)=Astarn(ind) endo call erril(Astarni.erreuril) do l=1.g erreurili(j,1)=erreuril(1) endido do l=1.q do lat.g
 call AMPCall(depart.svec(sbobe).yvec(sb
 call khol00(svec,yvec,tau().l).Astars)
do indel.d=1
 call khol00(svec,tau().l).Astars) cali errii(Asterni, erreurLi) do 1+1,q •rrearLi(j.1) +errearLi() endelo de lel.e ]=9 call ANPCall(depart.zvms(hbobs).yvec(hbobs)) call hboloS(zvec,yvec,tau(j,l).Astath) do ind=1.d-1 Ascarni(ind,1)=Astarn(ind) encide witide exity call wrrll(Astarn),erreurL1) do 1=1,q arreurL1(j,1)==rreurL1(1) endito do let.g. jild call AUPCall(depart.svec(sbcbs).yvec(sbobs)) call bbol5(svec,yvec,tau(j.1).Astarn) ( 4-1) encido encido endo call erril(Astarn1.erreurL1) do 1=1.g erreurL1(f,1)=erreurL1(1) endin do lei.g i jell cell AGPCall(depart, xvec(abobe), yvec(a mall CEGIS(xvec, yvec, ceu(j, 1), Astarn) do ind=1.d-1 Astarn1(ind,1)=Astarn(ind) enddo call erfll(AstarnL.errmarL1) do 1=1.g 4
errourLl(j,1)-errourLl(1) do l=1.g j=12 call AMPCal3(depart.svec(nbobs).yvec(nbobs)) call jes200(xvec,yvec,tau(j,1).Astarn) do ind=1,d=1 Astarn1(ind,1)=Astarn(ind) ... erreuril(Astarni, arrouril) do 1=1,q erreuril((),1)+erreuril() enddo enddo call errll(Astarni, erreurli)

call ANFCall(depart.xvec(nbobs),yvec(nbobs)) call %bo200(xvec,yvec.tau(j,1),Astarn)

do 1=1.g errmr611(1.1)=errmr11(1) wis-endide de l=1,q j=10 call AMPCall(depart, xvwC(nbubs), yvwC(nb call j=1) j=23 inveC, yvwC, tsu(j, 1), Astarn) do ind=1:d=1 Astarni(ind, 1) +Astarn(ind) ------enddo enddo do 1=1.c 1=15 cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs).yvec(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec(mbobs).yvec(mbobs).yvec(mbobs).yvec(mbobs)) cali MMF#11(depart.rvwc(mbobs).yvec( endo call erril(Astarni.erreuril) do l=1,q erreuril1(),1)=erreuri(1) encido do 1=1.q call AMPall(depart, rvsc(nbobs), vvsc(nbobs)) call AMPall(depart, rvsc(nbobs), vvsc(nbobs)) do ind=1, d=1 do ind=1, d=1 conte Artsrnl(ind, l)=Astarn(ind) encida encida enddo call errli(Astarni, erreurLl) do l=1,q erreurLl(),l)=erreurLl(); endda de leig jel7 call AMF#11(depart.rvec(hbobs).vvec(hbobs)) call AMF#21(avec.vvec,test().ll.Astarn) do indet.d-1 Astarni(ind,i)+Astarn(ind) enddo call errll(Asterni, errmiril) do 1=1,g q
errourLl().1) errourLL(1) endio endio cili estl(Astarni.erreurLi) do lel.q erreurLi(j,l)=erreurLi() enddo enddo i lel.g j=19 call Affall(depart.svec(nbobs),yvec(nbobs)) call joa200(zvec,yvec(tas(j,l),Astarn) do indel.dl joa200(zvec,yvec(tas(j,l),Astarn) do indel.dl joa200(zvec,yvec(tas(j,l),Astarn) do indel.dl joa200(zvec,yvec(tas(j,l),Astarn) do indel.dl joa200(zvec,yvec(tas(j,l),Astarn)) endo call erril(Astarhi.erreuril) ds l=1.q erreurill().l)=erreuril(1) endbo dn 1=1,q dn 1=1,q call anfwll(depart, zwec(nbobs), yvec(nbobs)) call josf0(zwec, yvec, tasij,l),Astarp) do ind=1,d-1 Astarpl(ind,l)=Astarp(ind) endio cali eril(Astarni, srreurLi) do l=1,q erreurLi1(3,1)=erreurL1(1) ARLES. endio cali errii(Astafmi, erreuri;) do i=l.q erreurii(j,i)=erreuri](i) enddo enddo call errii(Astarni.erreurii) do lel.g erreurii(j.l)eerreurii(j) endio endio celi esti(Astarni, erreurli) do lei,q erreurli[j,1]-erreurli[i] call eril(Astarni.erouril) do l=1.q erouril([,i]=erouril) eadda do lel.g j=23 call AMP#12(dapart.tYme(nbobs).yvec(sbobs)) call CTG25(svec,yvec,tsu(j,l).Astarn) call cTG25(svec,yvec,tsu(j,l).Astarn) enddo enddo call erril(Astarni.erreuril) do lal.q erreuril(),l)=erreuril()) erfore enddo do lel, q j=16 call Amys12(depart, xvsc(nbobs), yvec(nbobs))

call joal05(avec,yvec.tau(j,l).Astarn) do ind=1.d~1 Astarn1(ind.1)=Astarn(ind) endele call errit(Astarni.errouril) do 1=1,q nermustll(j,1)=nermustl(1) enddo do lel.g je27 cal AMF#12(depart.rvec(nbabe).yvec(nbabe)) cal jos50(nvec,yvec.tau(j,1).Astarn) do indel.d-1 Astarni(Lnd.l)=Astarn(ind) Astarni(ind.i)\*Astarn enddo enddo call erril(Astarn1, erreuril) do 1=1,q errourLl(j,l)=errourLl(l) endio call erril(Astarni, erreuril) do l=1.q erreuril1(j.l)=erreuril(1) enddo do lel.q j=29 coll AJPCall(dapart.xvec(nbobs),yvec(nbobs)) coll kbn200(xvec,yvec(tau(j,l).Astarn) do indel.d=1 Astarnl(ind.l)=Astarn(ind) Aftain enddo enddo call erri2(Astarni.erreurLi) do l=1.g erreurLi1(j,l)=erreurLi(l) enges call erri2(Astarn1, erreur11) de l=1,g erreur11(j,1)=erreur11(1) andda do l=1.q j=11 call AJPCall(depart.xvec(nhobe).yvec(nhobs)) call kho25(xvec,yvec.tau(j,1).Astarn) -tay d=1 enddo enddo call errli(Astarni,erreurLi) do lel.q erreurLl1j,l)=erreurLi(l) endio call erri?(Astarni,ersun\_\_\_\_ do l+1.q errourt1?(j,l)eerrourt1(1) anddo do 1=1.q enddo enddo call erril(Astarni, erreurti) do Jel.q erreurtii(j.l)-erreurti() encor cell erri2(Astarn1, erreur1) do l=1,q erreur11(),1)=erreur11() #ffTWD:sw... endda do lel.q jeJ5 cell AlPCall(dapart.svec(nbobs).yvec(nbebs)) cell J0m25(svec.yvec,tau(j,l),Astarn) do indel.q~l Astarn1(ind,l)=Astarn(ind) \_\_\_\_\_ endio call erri3(Astarni, strouri) do lai,q errourili(j,1) estrouri(()) enddo do 1=1,g ( j=36 call A2PCal2(depart.xvec(nhobs),yvec(nhobs)) call hho200(xvec.yvec.tau(j.l).Astarn) do indel.d-1 Astarn1(ind,1)=Astern(ind) enddo ando call artl2(Astarn1, «rreurL1) do l=1.0 q
errourL1(j,l)=errourL1(l) enddo da 1914 g. 2011 AlfCall(depart.rvwc(nhobe).yvwc(nho call Ahol00(svwc,yvwc.tau(j.ll.Astern) call chol00(svwc,yvwc.tau(j.ll.Astern) 1 enddo enddo cali ertl2(Attarni,erreurL) do 1=t.g erreurL11(j.1)=erreurL1() do i=t.g j=18 call Aprc12(depart, xvec(nbobe), yvec(nbobe)) call Aprc12(depart, xvec(nbobe), yvec(nbobe)) call Aprc12(depart, xvec, tau(j, l), Astarn) do indel.d=1 Astarn1(ind.1) +Astarn(ind) enddo

call erri2(Asterni.erreuril) do 1=1.g errourill(), i) -errouri()) call Grossiance, do indel.d-1 Astarnl(ind,1)=Astarn(ind) enddo enddo enddo cali eril(A4tarni,erreuril) do 1=1,q erreuril(),i)=erreuril() Grown workin dm l=1.q j=40 call APPCs12(depart.svac(sbabe),yvwc(sb call ios200(svwc.yvwc.taw(j.l).Astarn) do ind=1.d=1 Astarn1(ind,l)=Astarn(ind) ----Astarni(ind, 1)=Astarn anddo exdio call erril(Astarni, errourLi) do 1=1.q q erreurLl(j,l)=erreurLl(l) anddo do l-L.g do l=1.g j=41 call AJPCsIJ(depart, xvec(nbobs), yvec(nbobs)) call j0=50(nvec,yvec,tas(j,l),Astarn) do ind=1.d=1 Astarn1(ind,l)=Astarn(ind) endio endio call eril(Asterni, erreuril) de l-1,q erreuril(j,l)=erreuril(l) endds endds do lel.q j+42 call AlPCall(depart.zvec(nbobs),yvec(nbobs)) call (del5(zvec.yvec.csu(j,l),Astarn) do indel.dl Astarni(ind,l)=Astarn(ind) enddo call errll(Astarn1,erre<sub>name</sub> do l=1.d effeurt11(j,1)=erreurt1(1) effquaues... enddo do lel.q jell call Alfell(depart.svec(nbobs).yvec(nbobs)) (all kbul00(svec.yvec,tau(j,l).Astarn) do indpl.de Astarni(ind,l)=Astarn(ind) enddo enddo cell eril(Astarni,errourti) do lel.g errourtil(j.i)=errourti(l) enddo do i=1.q \_=4( \_\_ali AlFall(dapart.svec(nbobs),yvec(nbobs)) \_\_ali kbol00(zvec,yvec.tau(j.l).Astarn) do ind=1.d=1 \_\_Astarn1(ind,])=Astarn(ind) Astarn1(ind, 1)=Astarn enddo CELL err12(AstArn1, erreurL1) do 1=1,q q
erreurLl1(),1)=erreurL1(1) eFrance enddo do l=1.q j=15 c=11 A2P=11(depart.xvec(nbobs).yvec(nb c=11 kbo25(zvec,vvec(tau().)).Astarn) do ind=1.d-1 Astarni(ind,l)=Astarn(ind) enddo call errl2(Astarn1,erreurL1) do lel,q erreurL11(),1)=erreurL1(1) enddo do lei.g 1 j=46 cmll A2Vall(depart,xvec(nbobs),yvec(nbobs)) call CPG25(xvec,yvec,tau(j,1),Astarn) do ind=1.d-1 Astarni(ind,1)=Astarn(ind) Asian enddo enddo csli eriz(Astarni.erreurLi) do lel.q erreurLi().l)=erreurLi() Abar enddo enddo cil eri2(Asterni,erreurii) do lel,g erreuri1(j,l)=erreuri(l) enddo enddo do l=1,c j=48 call AIFall(depart,xvec(nbobs),yvec(nbobs)) call jas0(xvec,yvec,teu(j,l),Astarn) do indel,d-1 Astarni(ind,l)=Astarn(ind) enddo enddo call er do 1=1,4 erri2(Asterni.srreurii) q erreurill(j,l)=erreuril(l) dirman...
enddo
do l=l.q
jai9
call AlFall(depart.svec(nbobs),yvec(nbob
call jos25(svec,yvec,tau(j,l),Astarn)
do indel.d=l
Astarn1(ind,l)=Astarn(ind)
item enddo enddo call eri3(Astarni.erreuri1) do lal.g erreuri1(j.1)=erreuri1(1) enddo enddo call eril(Astarni,erreurL1) do lei,g erreurL1(j,l)=erreurL1(l) enddo do 1=1,q j=51

call A2Fm12(depart.svet(nbubs).yvet(nb dail hbol00(svet,yvet,tsu(j,l).Astarn) ds ind=1,d=1 Astarn1(ind.1)=Astarn(ind) مليله endis call erri2(Astarni.erreuri1) do l=1,q arreuri11(j.1)=erreuri1(1) endes affaires... endes affaires... de 1=1.q 1=52 (cell Aprel2(depart.rvec(nbobs).yvec(nbobs)) (cell Aprel2(depart.rvec(sout).).Astarn) de ind=1.d=1 Astarn1(ird.l)=Astarn(ind) call erri2(Asterni.erreuri1) do lel.g erreuri12(j.1)=erreuri11() Antonio endio cali erili(Astarni, arrauti) do lel.g erreutil(j,l)=erreuti() enddo enddo call errj2(Astarn1.errwurl1) do 1=1.q erreutL12(j.1)+erreurl1(1) do 1=1.4 call A27s12(depart.stwc(nbobs).yvec(nbobs)) call 10e50(stwc,yvec,tau(j,1).Astarn) do inde1,d-1 Astern1(ind.1)=Astarn(ind) endio call err12(Astarni.erreuril) do lei.q erreuril1().1)=erreuril(1) enddo do 1-1.q do 1=1.q y=56 call AIPal2(depart.stractnhobs),yvec(nbobe); do Inde.1.d 10e25(strac.yvec.tau(],1),Astarn) Astarn1(ind,1)=Astarn(ind) enddo call errl(Astarni,erreurl) do lel.q erreurll(j,l)=erreurl(l) anddo do j=1,36 errLibar(j)=0.d0 errLicar(j)=0.d0 taubar(j)=0.d0 RGH(j)=0.d0 enddo de j=1.36 do i=1.g ( errilbar())=errilbar())+(errwuril1(),1))/g errilcar())=érrilbar())+(errwuril1(),1)=\*2) tsubar())=fill()+(tsu(),1)/g EQM())=EQM())=((tsu(),1)-tsutar)\*\*2)/g do j=1.56
write(2,1003) tsuber(3).EQM(3).ertLiber(3).ertLicer(3)
format(4(1X,P17.12)./)
enddo 1003 Tenden do 1=1.56 do 1=1.00 vrite(3.1006) teu(j,1).errourt11(j,1) format(1X,F17.12,1X,F17.12) 1006 close(3) close(2) end PROCEDURE GENERANT 1500 COUPLES (XVMC: VVMC) DE COPULE ARCHIMAX. OU A EST LA PONCTION DE DEPENDANCE MIXTE (AL) AVEC Checaso.J ET OU HII EST LE GENERATEUR DE CLAYTON AVEC alguma4/7 1000 else c=1.d0 supCJ=1.d0+1.d0/(c^siphs) w=simuAR(kphiCJ,supCJ) weisimuAA(RphiCJ, supCJ)
end(f
suril=pphiCf(w)/A
x=pphiIrvC7(1\*\*xuril)
y=phiIrvC7(1\*\*xuril)
nboba=nboba\*1
xves(Inboba=)=x
yves(Inboba=)=x
yves(Inboba=)=x
gets 100
end(
end(
end())
end()
e PROCEDURE GENERANY 2500 COUPLES (XVec, yvec) DE COFULE ARCHIMAX, OU A EST La ponction de dependance mixte (A1) Avec (hels=0.3 et ou pni est le generateur de clayton avec sign=1.6 subroutine AMFCal4(depart,rvec,yvec) include 'commun' integer hobe,it.jpl,jt.eml real\*6 rvec(h) yvec(h) real\*6 rvec(h),rvec(h),rup,denomp,p,u,v,supCJ.suril,x,y real\*6 based,simuM,phplCJ,phlCJ,phlirvCJ real\*6 some,spnx,spny,Laun

sminnersi bmixed.simukk.kphiCJ.phiCJ.phi(swCJ bhobse.lt.n) then perked.ldd alphe=1.6d0 bornse=1.6d0 bornse=1.6d0 bornse=1.6d0 calide=1.6d0 bornse=1.6d0 calide=partx=t1.6d0-st\*tperk=t\*2-partx=t1.60 demompupartx=t1.6d0-st\*tperk=t\*2-partx=t1.60 demompupartx=t1.6d0-st\*tperk=t\*2-partx=t1.60 demompupartx=t1.6d0 demompupartx=t1.6d0 demompupartx=t1.6d0 demompupartx=t1.6d0 demompupartx=t1.6d0 demompupartx=t1.6d0 demompupartx=t1.6d0 demompupartx=t1.6d0 demomputartx=t1.6d0 demomputartx=t eise alpha=0.57143857d0 c=1.d0 supCJ=1.d0+1.d0/(c\*alpha) w=simulR(hphiCJ,supCJ) 1000 andi f ur auxil=phiCJ(w)/A x=phinvCJ(r\*auxil) y=phinvCJ((1.d0-z)\*auxil) beambubas! nbobe=nbobe+1 xvec(nbobe)=x yvec(nbobe)=y goto 1004 end1f vec(Inbobs)=-y gets 1.004 endit PMC\_INCRE Contract 1100 COURTL& (reac.,vec) DE COURT ARCHINAL, OU A EST independential Experimental Antipartic() (A1 ET CO PHE EST LE contractions and Experimental Antipartic() (A1 ET CO PHE EST LE independential (A1 EST L upCF%1.d6+1.d0/(c\*a)
extinutR(kph(CF,supCi
supCi)
supCi(f(v))/A
sup gets 1000 endif end PROCECURE GURENANT 1500 COUPLES (svec.yvec) DE COPULE ARCHINAX, OU A EST LA POMCTION DE DEPENDRANCE MINTE (AL) AVEC Cheta=0.3 FT OU PHI EST LE COMERATERU ES FRANCE AVEC alphane=2.09 subroutine ANFAll(depart.rvec.yvec) include "commun" integer abbas.it.[pl.jc.mml real\*s resc(nl,yvec(n) real\*s resc(nl,yvec(n)) real\*s entred.simuA, RphiPobe.phiF, phinvf real\*s baixed.simuA, RphiPobe.phiF, phinvf real\*s comme.egum.egum,taun external haised.simuA, RphiPobe.phiF, phinvf nbobs=0 1000 if (nbobs.it.n) then parAe0.1d0 alpha=2.0d02.d0\*parA/(4.d0\*parA) resimuM(Imixed.herna) call degmined(1,parA.A) numpo=2\*parA\*(1\*2\*c)\*parA\*(1.d0 demomput(2); terd-1\*y\*1=e\*\*2] - \* fparA\*(1\*2\*c)\*parA\*(1.d0 perump/denomp u=drand(0) 1f (u-1e.p) then ecl.d0 w=KphiPobs() endif end endif p-mump/denomp u-drand(0) if (u.le.p) then alpha=1.6d0 c=1.d0 supCJ=1.d0+1.d0/(c\*alpha) v=simAR(kphiCJ.supCJ) w-KphiPobs() wEQDIPODe()
endif
e weRphiPobe()
excil=phiP(w)/A
x=phirw?(\*=uui)
y=phirw?(\*=uui)
hobs=hobs/si
hobs=lobs/si
y=cilabols/=x
excil=y
exci endit wnd MOCEDURE CEDERART 1500 COUPLES (xvec.yvec) DE COPULE ARCHIDAX, OU A EST LA FORTION DE DEPENDANCE ASTMENTQUE (A2) ET OU PHI EST LE CEDERATEUR DE CLATTOR AVEC alpha=4/7 subroutine AlFCall(depart.xvec.yvec) include 'commun' integer nhobs.it.ipi,jc.mal real\*8 twee(n),yvec(n) real\*8 thisto: isumAt, hphic, phi(c), phi(c), supCJ, suxil.x,y real\*8 thisto: isumAt, hphic, phi(c), phi(c), phi(c), fonc, foncl, fonc2 real\*8 (phi), phi(phi(c), phi(C), phi(C), phi(c), phi(c), nbobs=0 1004 if\_ insobs.it.n) then endif =nump/denomp =drand(0) f (u.is.p) then ==drand(0) u=dram.s., eLse alpha=2.09d0 c=1.d0 u=RphiPobs() w=EphiFobs()
endif
auxil=ghiF(w)/A
x=ghiinvF(t^auxil)
y=ghiinvF((1.d0-z)\*auxil)
hoh==nbas+1 xephiintyf(:\*suci) yephiintyf(:.do.si\*suci) nbobaenboba=1 ywet(nboba)=y gets(nboba)=y gets(nboba)=y gets(nboba)=y gets(nboba)=y gets(nboba)=y gets(nboba)=y gets(nboba)=y gets(nboba)=y and real(::subs(::subs(nboba)) include 'commun' infile.is.0.2dd) then bornes!.64863dd resimukThA3.bornes call depAltr.is. if(1.1.6.0.2dd) then bornes! if(1.1.6 excernal xpairpole.phiF.philmvP hbobse0 if (house.it.m) then borme1.648540 testmukh(hk1,borne) if (ababe.it.m) if (ababe.it.m) fonce1.87960\*\*\*-2.73do\*\*\*1.d0 fonct:8.7960\*\*-2.73do\*\*.1.d0 fonct:8.7960\*\*-2.73do fonct:8.7960\*\*2.73do fonc2:1.73d0 fonc2 1004 alse "tunn" tunn" tunn mampart(1.d0-c1\*0.13175d0 fonct=0.0078125d0\*(13.d0\*z\*\*2-6.d0\*t\*13.d0) fonc1=0.0078125d0\*(10.d0\*z\*6.d0) fonc1=1.00\*(1.d0-2.d0\*z\*6.d0) fonc1=1.a0\*(1.d0-2.d0\*z\*6.d0) fonc1=1.a0\*(1.d0-2.d0\*z\* else fonc. denompe(sec endif p=nump/denomp --and(0) --and(0) if (u.le.p) then

00:3+1,d0+(1,d0+2,d0\*x)\*famc1/famc 00:5+x\*(1=x)\*(famc2/famc+(famc1/famc)\*\*2) 0000+(famc3+fanc4)\*famc Immer-1 (Jone1+fonc4)\*tune. denomp.(Inde1+fonc4)\*tune. Toure0.007812540\*(13.00\*\*\*2-6.40) fonc1+0.007812540\*(13.00\*\*\*2-6.40) fonc2+0.007812540\*(13.00\*\*\*\*6.40) fonc2+1.00\*(1.40\*-1.40\*\*\*\*fonc1/fonc1/fonc1 fonc4\*\*(1.4)\*(1.60\*-1.40\*\*\*\*fonc1 fonc4\*\*(1.4)\*(fonc1\*fonc1/fonc1/fonc1)\*\*1) denomp.(fonc3\*fonc6)\*fonc endif p-nump/denomp uedrand(0) 16 (u.le.p) then w=drand(0) else and PROCEEDURE GENERANT 2506 COUPLES (Avec., yesc) OK COPULE ARCHINA, OU A BET LA FONCTION SE DEPENDANCE MITTE (A) AVEC thecs=0.666 ET OU PHI EST LE GENERATEUR DE CLATTON AVEC alpha=0.372 1000 nump/denomp drahd(0) (V.le.p) then •••drahd(0) else else eug\_Jel.d0+1.d0/(c\*elpbe] uwg\_Jel.d0+1.d0/(c\*elpbe] 12 .upCJ=1 d0+1 d0/(c\*s. w=SLBLAR(kDhiCJ,supC andif sustisphiCJ(w)/A x=DhtinvCJ(1:d0-c1\*susti) y=DhinvCJ(1:d0-c1\*susti) xvec(hDabe=1 xvec(hDabe=1) xvec(hDabe=1 xvec(hDabe=1) xvec(hD 1004 1004 www.fbi.Fobs() www.fbi.Fobs() www.filmowy.frequently wyphilmowy.fl.do-ej\*euxil) wyphilmowy.fl.do-ej\*euxil) www.fl.bobset.wy gwc.fl.bobst.wy gwc.fl.bobst.wy gwc.fl.bobst.wy

emdif end PRCCEDURE CEMERANT 1300 COUPLER (svec.yvec) DE CONULA ANCHINAL OF A BET LA PORTION DE CEMENANCE RITYE (A) AVEC (betraef.448 KT OU PH EST LE COMMUNITION AVEC AIPER (A) AVEC (A) AVEC (betraef.448 KT OU PH EST LE COMMUNITION AVEC AVEC (a) DE CONULA ANCHINE, y include 'comman' inceger abbes 1. (pl.) (c.mmi real's wee(IN),vec(IN) real's depart, horne. I.A. (nump, demomp, p.u.w. auxil.x.y real's beised, sisualA.kphiC2.phiC3.phiInvC3.KphiFobs.phiF.phiInvF real's beised, sisualA.kphiC3.phiC3.phiInvC3 esternal The beised, sisualA.kphiC3.phiC3.phiInvC3 esternal The beised, sisualA.kphiC3.phiC3.phiInvC3 esternal The beised, beine) n parA-d.64840 alpha=7.1300 Derme.100-100'parA/(4.00-parA) esternal(b) add berne) call depaixed(1, parA.h) mapp-2parA\*T(1.00-c)'(parA\*T\*T2-parA\*T+1.00) denompoparA\*T4(1\*1-2\*T0+1-2\*T) - 4\*ParA\*T(1\*1-2\*T0+1-2\*T0+1-0) if (u.1e.p) then extrand(0) (u.le.g) then w-drand(0) else c=1.d0 w=RphiFobs() andi f c=1.d0 supCJ=1.d0+1.d0/(c\*siphs) w=simuAE(kphiCJ, supCJ) weimuks(kphicJ, supCJ)
endif
susiiephiCJ(wi/A
supCJ)
supCJ(wi/S \*usci)
yvphiimvCJ((1.d)=1\*suxi)
suprover(1.d)=1\*suxi
suprover(1.d)=1\*suxi
suprover(1.d)=1\*suxi
suprover(1.d)=1\*suxi
suprover(1.d)=1\*suxi
suprover(1.d)=1\*suxi
suprover(1.d)=1\*suxi
suprover(1.d)=1\*suprover(1 andit external RphiPobe.phiP.philivyP mbobs=0 if imbobs.it.n; then barnel.a if imbobs.it.n; then barnel.a if imbobs.it.n; ifis.it.departs.id. form=1:ideparts.id. form=1:ideparts.id. form=1:ideparts.id. form=1:ideparts.ide form=1:ideparts.ide form=1:ideparts.ideparts.ideparts.ideparts.ide form=1:ideparts.idepa Edm:s=1 denomp (fonc3+toms, else =\*(1, d0-e)\*0.7560 fonc=0.12560\*1, d0\*s\*2\*2-2, d0\*s\*7.d0) fonc:0.12560\*1, d0\*s\*2.d0) fonc:0.12560\*1, d0\*s\*2.d0 fonc=10.12560\*6, d0 fonc=11.2560\*6, denoup+{inc3+i endif endif endrand(0) i=drand(0) if (u.le.p) then w=drand(0) else else 17 alpha=2.953 c=1.d0 supCJ=1.d0+1.d0/(c\*alpha) w=simuAE(kphiCJ.supCJ) and if iif auxil=phiCJ(w)/A x=phiInvCJ(x\*auxil) y=phiInvCJ((1.d0-x)\*auxil) bs=nbobs=1

madil 7

\*\*\*\*\*\*\* .......... ....... CEDERE GEMERANT 1500 COUPLES (svec.yvec) DE CONCLE ARCHIMAT, OU A EST Ponction de depondance astmetrique (A4) et ou but est le gemerateur Pancta Avec algume 1.23 10 ----eutroniine A2# 11 (depart.xvec,yvec) Include 'commun' (depart.xvec,yvec) Include 'commun' (depart.xvec,yvec) Integer hobbe, 1...jol.jt.net feel?# zvec(n),rvec(n) reel?# depart.borne.x.a.numg.denomp.p.u.w.euxil.x.y reel?# depart.borne.x.a.numg.denomp.p.u.w.euxil.x.y reel?# bmixed.si.a.n.a. reel?# Sphirobe.phi?.phi(J.phi(J.phi) reel?# Sphirobe.phi?.phi(J.phi) external Sphirobe.phi?.phi(rvf nbobs=0 external RphiPohs,phiP,philinvf inboks0 36 (nhobs.lt.a) then borns.lt.a existmatR(hA2,borns) existmatR(hA2,borns) f(t.t.t.0,1333360) then fores.l.360 \*\*\*\*3-exist fores.l.360 \*\*\*\*3-exist fore2.l.360 \*\*\*\*3-exist fore2.l.360 \*\*\*\*3-exist fore6.s\*\*(l.t.\*\*) f(onc:2f onc-fonc6.l\*\*(l.t.\*\*) f(onc:2f onc-slae slae LADR(J. CONTINUE LADR/2-1 IRANE CONTINUE 1004 10 . demomp = fonci + fonc 4) \* fonc else numper \* (1. d0-s1 \* 0.75d0 fonc=0.125d0\* (1. d0\*s\*\*\*2.1. d0\*s\*\*.d0) fonc:=0.125d0\* (1. d0\*s\*\*2.1. d0\*s\*\*.d0) fonc:=0.125d0\* (1. d0\*s.\*.d0) fonc:=1.d0\*11. d0-2. d0\*s) \* fonc1/fonc fonci\*\*[1:s1\*!fonc\*!fonc\*!fonc!/fonc]\*\*1) demomp\*(fonc) \* fonc\*! \* fonc dif trand(0) (u.le.p) then wedrand(0) else 20 end CEDURE GENERANT 2500 CODPLES (Avec.yvec) DE COPULE ARCHINAX, OU A EST ) FORCTION DE DEPERDANCE ASTMERIQUE (A4) ET OU PHI EST LE GDEGATORE DE ANCE AVEC = loha=7.83 X AVEC sites 7.81 subroutine AlFall(depart.xvec.yvec) include 'commun' integer abbs.it.jbl.jt.ml real's Avec(s).yvec(n) real's baised, risulA.ppl(07,phl(07,phl(07,phl(17,yt))) real's baised, risulA.ppl(07,ph 1004 dif auxil=phiffw)/A x=phifrwffraauxill y=phifrwffll.d0=s)\*euxil) he=phins=1 wec(hbobs) =: yvecinbo goto 100 endit RECEDENCE CALCULARY LE TAU DE ERMEALL D'ORE DISTRIBUTION DE VE. DE PORTION de dermenance an commune de chaque foiet d'une surdivision sub de pas de (0.1), de taille d. subroutine tauE(sub.pas.av.toutrup.tourimpson.sut) include "commun" real's tautrup.tousimpson.pee real's sutrup.tousimpson.pee real's sutin.sutid).sutid).dlavid) integer 1. j dlavil.sutid).sutid).dlavid) dlavil.sutid).sutid).dlavid) dlavil.sutid).sutid).sutid).sutid) sutid).subid).subid).dlavid.sutid) sutid).so.do sutid).so 11 12 CODILINA-jal tauaimpson=0.d0 if (j.1t.d-3) then tauaimpson-tauaimpson tauaimpson-tauaimpson pas\*(suux(j)+4.d0\*aux(j+1)+eux(j+2))/3.d0 j=j+2 geto 101 endif 101

PROCEEDING CALCULARY LE VECTORE 'Irank' ORS RANGE D'UN VECTRIR DE TAILLE 'N' A PARTIE DU VECTRUM 'Indel' DES ATTI-RANGE, REFULTAT DE LA FROCEDURE 'Indeput f' subicutine resk(n, indx1, trank) integer n, indx1(n), irank(n) integer j do 10 jel,n irank(indx1(j))=j 10 CHRILING God HOCHEOURE QUI TRIE PAR GEDEE CHOISSANT UN VECTEUR ARRIW DE TAILLE NM. ET STOCKE LES ANTILANGE HANNE LE VELTEUR INDX. SUBMCOUTER INDEX(IM, ARRIK, IMEX) Trelig arribien) Integer nn. index(nn) (.ir.imex) Trelig q IND(NM) DQ 11 J=1,ME IDEX(IM) 1 CONTINUE TTL.OT. 1) THE F(L.GT.1)THEN L=L-1 INCOT-SHOC(L) G-AREIN(INCOT) LSE G-AREIN(INCOT) LSE G-AREIN(INCOT) LSE G-AREIN(INCOT) LSE G-AREIN(INCOT) G-AREIN G-AREIN G-AREIN CONST BODIF BODIF I=L J=L-IF(J.(J.T.IR)THEN IF(J.(J.T.IR)THEN IF(J.(J EDDIF INDET:)=INDET GO TO 10 BDD PONCTION REPORTANT IA VALENS OF LA PONCTION PHI en L. ou PHI = (PHI)\*C. svec C == 1, et ou PHI = generateur de la copule archimedienne de Cook et Johnson de parametre elpina, elpha > 0. real\*0 function phiCJ(t)
real\*0 t
include 'commun'
phiCJ\*((t\*\*(-alpha1-1.d0)/alpha)\*\*c
exet PORTION AFTOURNANT LA VALUER DE L'INVERSE DE LA PORTION PHI en t ou PHI « (PSI)"C, evec c >= 1. et ou PSI « genersteur de la copule archimedierme de Cook et Johnson de parametre alpha. alpha » 0. reel+% function phinvCJ(t) real+% t include 'compuny' phinvCJ=(1.d0+slpha\*t\*\*(1.d0/c))\*\*(-L.d0/slpha) philmsCiv(1.d0valpha\*t\*\*(1.d0/c))\*\*(-t.du/sapam, end MONATION ARTOUNAANT LA VALUUM DE L'INVERSE DE LA FONCTION FMI en t. ou FMI = [FE17:c. evec = v. l. st ou FMI - generateur de la copule archimedienne de Frenk de parametre Alpha Vin R. real\*6 function philovF(t)
real\*6 t
include 'commun'
philovF\*(-1.d0/alpha)\*log(1=sep(-t\*\*(1.d0/c))\*(1=sep(-slpha);)
end real\*8 function kphiCJ(t) real\*8 t.excel include 'commun' auxiv1.d0 \* (1.d0 - (siphe\*1.d0)\*t\*\*siphe)/(c\*siphe) hohicSecuri tphic3=suni term formert to the formert the formert the formert for formert formert formert formert formert for the formert formert for the formert f tour Civia t2=10verse(aaut) RphiFobe-t2 end end PORTION CALCULANT L'INVERSE 20 ME POINT D'UNE PORTION dobit DESATEANTE SUR [a.b]. No Cube effects de goallon. (s.b, et opsilon sont a specifiar dans la fonderes real-4 function inversatu) integer mister real-4 equilon, e. b. xg. xd. u. y. mil real-4 equilon, e. b. xg. xd. u. y. mil real-6 dobit militare0 

if ((abe(y-u).ge.spailon).and.(nhiter.le.1000)) then if (y.gt.u) them 10 then missionil else if (nbiter.ge.1060) them write(6.\*)\*trop d iterations ! \* endif srmewnil endif inversemil end real\*8 function inform(FUNC, K1, K2, TOL) integer insak.ice real\*8 x1, K2, Col, eps, a, b, c. d. e, fa. fb, fc, xm, toll, a, \* real\*8 func enterma i func PARAMETTE (ITHAK=100, EPs=3.0-8) ax1 PAGENETER [INALALUG,ETSS.L-4] A-E1 3-E2 7-FURC(A) 7 10 ENDIP IF(ABS(PC).LT.ABS(PB)) THE [F(AS(PC),LT,AS(PS)) THE A=B B=C C=A 7A=PB FC=FA FC=FA BD(F TCL12,d0\*EPS\*AS(B)+0,5d0\*TOL TOL12,d0\*EPS\*AS(B)+0,5d0\*TOL 196-1500\*(C-B) 19(ANS(201).LE.TOLL .CR. PB.RQ.0.00)19009 ZBRENT RETURN KDIP 1001 ENDIP IF(ABS(E).GE.TOLL .AND. ABS(FA).OT.ABS(FB)) THEN ELSE G-FJA/FC RefB/FC p+S\*(2 d0\*30\*(0+L-d0)\*(S-L-d0) (-(0-L-d0)\*(S-L-d0)\*(S-L-d0) 07-m-t 139 (TAFB (FLAS(D) .GT. TOL1) THEN BABOD ELSE BABOJE FBASIGN(TOL1.JOH) ENDIP FBASIGN(TOL1.JOH) ENDIP FBASIGN TEREFT MUSIC TEREFT exceeding maximum iterations." 11 301 ZBREDIT-B RETURN ..... CALCULANT (-ord + phi'(1)), ou phi'est LA DERIVEE EN UN POINT : DE FIGN 'phi', OU phi = pai's, avec 'psi' = GEMERATEUR DE FRAME, et ; PONCTION CALC LA PONCTION 107 resi\*@ function dphif(t)
resi\*@ t. si. si.auxili
include "comman"
auxilieexp(-sipha)
airexp(-\*alpha)
si=cr(-c\*alpha)
si=cr(-c\*alpha)
si=cr(-c-ard
biserp(-c-ard
biser 306 end FONCTION RETOURIENT LA VALEUR EN E DE LA DENSITE h DE LA V. A. '2'. FOUR UNE FOUNDERT LA VALUER EN E DE LA DENNITE A DE LA V. PONCTION DE DEPENDANCE DU MODELE MIXTE, A = A(th), 0 «= th «=1. 303 real\*0 function hmixed(t)
real\*0 t\_th.rum.denom
include "commun"
thrpafA
rumseth t\_?:=t\*\*2.et\*\*1.et\*\*1.et\*t+(-t\*\*2.et)+1-th
dmixedrpum/denom
end 304 305 include 'commun' AlepA\*t\*\*2 - pA\*t +1.d0 PROCEDURE CALCULART LA VALUER EN E DE A, OU A EST LA FONCTION DE DEFENDANCE DU MODELE AA remins depla(t.Al) remins c.Al include "commun" if (t.lt.0.13331d0) then Al=3.d0\*(t\*\*2)/2.d0-t+1.d0 199 Al=0.125d0\*(3.d0\*t\*\*2.d0=2.d0\*t\*7.d0) endif and ...... PONCTION REFORMANT LA VALEUR EN L DE LA DEMESTE À DE LA V. A. '2', POUR UNE Fonction de defendante du modele A4, A = A(th), 0 <= th <=1. 301 real\*8 function bA2(t) real\*8 t.A.Al.A2 include 'comun' 1 (t.ltc.0.333300) then A=1.5d0\*t\*\*2-t\*1.d0 A1=1.5d0\*t2.d0\*t-1.d0 A2=1.5d0\*2.d0 302 else A# (3.40\*t\*\*2-2.40\*t+7.40)/8.40

Al=(6.d0\*t-1.d0)/8.d0 Al=6/8 endig hA2=1+(1-2\*t)\*A1/A+t\*(1-t)\*(A2/A-((A1/A)\*\*2)) AND FORCTION REFOUNDANT LA VALEOR ES E DE LA DENSITE À DE LA V. A. "I", FOUR ONE FONCTION DE DEFENDANCE DU MODELE AZ. A = A(ED), D «= ED «A). real\*S function halit! real\*S t.A.Al.Al Include 'common' if (t.1.0.200) them Arl.#7500\*t\*2-0.7500\*t+1.d0 Al.37500\*t\*0.7500 Al=3.7500 A=(15.d0\*t\*2=6.d0\*t+119.d0)/128.d0 A1=(30.d0\*t=6.d0)/128.d0 A2=0.234375d0 endif hAl=1+(1-2\*t!\*Ai/A+t\*(1-t)\*(A2/A-((A1/A)\*\*2)) endi ENDURE CALCULANT LA VALEUR DH t DE A, OU A EST LA FONCTION DE DEFENDANCE DU F A2 Al=1.875d0\*t\*\*2-0.75d0\*t+1 elee Al=0.0078125d0\*(15.d0\*t\*\*2.d0-6.d0\*t+115.d0) endif and FONCTION RETOUNDANT UNE CAREENVATION ISSUE D'UNE V. A. DE DENSITE C. BORNEE PAR Boths. En utilisant la metrode d'acceptation/reitt. real=8 function simula(f, borns) integer test real=8 i, borns, zstar. ul. sux include "commun" real=8 f strangl f real\*e \_
starnal f
castv0
if(Lest.eq.0) then
if(Lest.eq.0) then
if(sur.ge.horne\*ul) then
if (sur.ge.horne\*ul) then
clotstar
castsi
endif goto 1001 endif simuAR=zi real\*8 taut7, taus, integ(d) real\*8 (0, 11(n), 12(n) do 199 indel,d t(ind)=dble(ind)/dble(d) continue continue pas-t(1) -t(1) nstar=15.d0 call indems(n.xvec.antirgx) do JOI i=1.n mord(1)=xvec(antirgx(1)) yord(1)=yvec(antirgx(1)) continue e(i)=i); elfe e(i)=Q/n endif enddo call indext(n,e.antirgt) do 303 i=1,n tord(i)=@(antirgt(i)) continue eum=0.d0 j=25.d0 do 304 i=2476,2475+10 sum=tord(1)\*j+sum j=j-1.d0 Astarn(ind) +t (ind) \*sum/10.d0 call tauE(t. pas. Astarn. taut7. taus. inter) PROCEDURE CALCULANT L'ESTIMATEUR DE JOE ET AL. AVEC DE SEUIL DE 100/2300
subroutine joe50(svec.yvec.taut7.Astarn;
include 'Commun'
integer rpr(n), entirgr(n), antirgr(n),antirgr(n),
integer rpr(n), svec(n), zord(n), yord(n),pas.terd(n)
real\*6 suser(d).t(d),S.e(n)
real\*6 sus continue past(1)-(1) natar-50.d0 call indext(n,yvec.antirgx) d0 30 isl.n nord(1)=xvec(antirgy(1)) yord(1)=yvec(antirgy(1)) continue call reak(s.astifyz,ryz)
call reak(s.astifyz,ryz)
call reak(s.astifyz,ryz)
do 302 isi,n.d0/log(dbls(n)/(dbls(ryz(i))-0.5d0))
z1(i)=1,d0/log(dbls(n)/(dbls(ryz(i))-0.5d0)) 

	else		
107	endi.f	eitiens	
104	call indexo:(0, e		101
	da 101 1=1.n tord(1)	<pre>** funting: (1))</pre>	
101	continue sum=0.d0		
	1=50.00 do 104 1=2451.2	2458+35	
	int-1.d0		
364	enddo	nd1 no	
185	enddo		
	end	, An(Arn, Cauc), Esta, Integ)	193
HICED	URE CALCULANT L'I	ESTINATEUR DE JOE ST AL. AVEC UN SEUIL DE 25/2500	
	subroutine joel	106(xwmc, ywec.taut7, Jatarn)	103
	include 'commun integer run(n).	rdy[n]. entirgx[n]. entirgy[n].entirgt[n].	
•	ind, netar.		
	real*8 Astarnid	1),t(d),B,e(c)	
	real*E rear? re	hus interidi	
	Tesl*8 0, 11(0),		
	c(ind)-de	ile(ind)/dble(d)	103
.,,	pas=t(2)-t(1)		104
	call indext(n.x	cvec.antirps)	••••
	do 101 1+1,n	wec.entirgy)	PROC
	yord(1)-y	wectantingx(1)) Wectantingy(1)	
201	call rankin, anti	(rgx, rgx)	
	de 302 1=1.n	rgy. rgy1	
	#1[1]=L.d #2{1}=L.d	10/logidble(n)/(dble(rgx(1))=0.5d0)) 10/logidble(n)/(dble(rgy(1))=0.5d0))	
302	do 305 ind=1.d-	-1	
	Be(1-t) do 106 i=1.n	ind))/c(ind)	
	Q=8'z2(1) 10 (z1)	(1).GT.Q) then	199
	else	e(1)=z1(1)/n	
	endi (	e[1]=Q/a	
706	call indexate. a	, antirg1	
	do 103 i+1.n cord(i)	-s(antirgt(1))	101
303	sume(.d0		
	1=200.00 do 104 1=2301.2	300-185	
	j=j-1.d0		
304	Astarn(ind)=t(i	.nd) * sun/185	
305	call tauKit.pes	, Astern, taut7, taus, integi	
	bne 		
PROCED	URE CALCULANT L'E	STINATED DE RECORDI AVEC ON REDIC DE 2372300	102
	subroutine khol include 'commun	S Ixvec. yvec. Laut3. Aatern)	
	istar(n),	rgy(n), antirgx(n), antirgy(n), t,ind.nster,i	103
	real*8 xvec(n). xstar(n).	yvec(n), xord(n), yord(n).pes. ystar(n), rvec(n), vvec(n),rstar21	
	real*8 Anaux, au	mill.euxil7.Astarn(d).t(d)	
	real*8 taut1.ta	us, integ(d)	
	do 199 indel.d t(ind)=d2	ble:ind)/dbleid)	
199	paset(2)-t(1)		105
	rster21=25.do		104
	call indepotents call indepotents	rvec.antirgri /vec.antirgri	
	do 101 1=1.m sord(1)=7	cvec(antirgx(1))	PROC
101	yord(1) - y	(vectantingy[1])	
	call rank(n.ant call rank(n.ant	tirgy, rgpt) tirgy, rgy)	
	do 1=1.p rvec(1)	9=0.40	
	enddo do 102 i=1,n		
	xstar(1) ystar(1)	<pre>&gt;1.d0/log(dbls(n)/(dbls(rgx(L))=0.5d0)) =1.d0/log(dbls(n)/(dbls(rgy(L))=0.5d0))</pre>	
	if (rvec	Retar(1)+ystar(1) (1).gt.rstar21) then	
		teter(neter)=1	
102	CONCARNE	endil	
	do 103 k=1.nata: www.c(k)=	r matar(intar(k))/rvectistar(k))	
103	continue do 104 ind=1.d-	1	500
	do 105 k	d0 =1.natar	
	:	uzt]]=wvec(z)={[[nd]}) uzt]]={1.d0-wvec(z)}={[.d0-t([nd]])	
	11	f (auxili.ge.suxil2) than Anaux=Anaux+suxil2	
	•	Aneux+Aneux+suzi12	
105		nale ontinue	
104	continue	SC)=2.CO*ALGUE/CD1=(BSCAF)	
	and	,	
PROCES	THE CALCULANT L'I	ESTIMATEDE DE ENOLDRAJI AVEC UN SEUIL DE 186/2500	
	subroutine Abo	100 (XV0C, JV0C, LAULZ, AALATD)	
	include 'commu integer rgx(n).	. rgy(n), entirge(n), entirgy(n).	
•	istar(n), i real*5 yvec(n).	k.ind.natar.i .ywerin). xardin), yordini.pes.	
•	TATATIAN,	ystar(n), rvac(n), www.(n),rstar21 umill.aumil2.Astarn(d),t(d)	11
	do 199 indel.d	HIR, INCAG (C)	DEF
199	continue	11e:11m2)/Ghlê(d)	
	pes=1(2)-1(1) rster21=100.d0		
	CAll Indeprin.	TVOC. ADT. I TON	

. . . . . . . . . . . . .

call indext(n.yver.antiryy)
do IO1 i=1,n
 serd(1)=xver(antirgx(1))
 yord(1)=yver(antirgy(i))
 continue continue cult rank(n.antirgr.rgs) cult rank(n.antirgr.rgs) do i=1.n rwwc(1)=0.d0 Angura Angura (uki)1 ning Angura Angura (uki)12 andif continue Astarn(ind)=2.d0\*Anaux/dble(nstar) continue continue call tauE(t, pas, Astarn, taut2, taus, integ) examples. ind there is a second to be a second to be address of the second to be address of real\*6 Ansux.suxill.suxil2.Asta real\*6 fast1, suxil2.Asta continue pass(2)-(1) rest2)-200.do mstare0.do nstare0.do nstare0.do infinitus rest2)-200.do mstare0.do infinitus call indexc(n,rvec.antirgy) do io1 i=1,n xard(1)-rvec(antirgy(1)) continue call rank(n.satirgy.rgy) do isi.n continue call rank(n.satirgy.rgy) do isi.n continue rest(1)-0.do endo enddo enddo 0 102 i=i,n do 102 i=i,n ystar(i)=i.d0/log(db)=(n)/(db)=(rgx(i)=0.5d0)) ystar(i)=i.d0/log(db)=(n)/(db)=(rgy(i)=0.5d0)) rvec(i)=zstar(i)=ystar(i) trec(i)=zstar(i)=ystar(i) if (rvec(i)=gr.rstar(i)) then nstarvestar(i)=i endif iscarinatorial
i continue Astarn (ind)=2.d0\*Aneux/dble(nstar) continue call tauK(t.pss.Astarn.taut1.taus.integ) reel\*8 Anrgid) reel\*8 taut5 do m+1,25 15 maxitvec (m) == 99999 . d0 maxyvec (m) == 99999 . d0 oddo enddo j=1 m=1 do 1=j,j=59 12 (zvec(1).GE.makovec(m)) then maxivec(m)=zvec(1) else BAXEVOC(B)=XVOC(I) BAXEVOC(B)=BAXEVOC(B) mdlf if (yvec(1).GE.maxyvec(m)) then maxyvec(m) syvec(1) eise naxyvec(a) «saxyvec(a) andif enddo j=j+100 end TEXNER DE CALCUL DE L'ESTIMATERE NON SARANGERIQUE AN DE LA PONCTION DE TEXNER DE CONTRE COPILE DE VALEME ESTISMES, A SARTE D'UN EQUANTILLON (u.v) TAILLE n DE COUVELS DE MAINA DE MARGES UNIFORMES. subroutine subCPG2(u,v,x,Acfg,taut) integer nn. d parameter (nn=25, d=100) integer i, ind, indi, antiryt(nn), k2

do ind=1,d=1 if (j.it.d.3333d0) tBen ====nmbbr(ind)=1.5dB\*(j)\*=2-j+1.dD Astarnber(ind)=0.125d0\*(3\*(3)\*\*7-7\*1+7) endif 1=1+0.01d0 199 enddo de 1=1,g errful(1)=0.d0 10 do 1=1,q do ind=1,d=1 uril (i) enrouril (i) eabs (Asternber (ind) - Asterni (ind, 1) ) epddo enddo do I=L.Q errouri(1)=errouri1(1)=0.01d0 enddo 12 13 PROCEDURE CALCULANT L'ERREUR LI ENTRE LA PURCTION A MINTE (AL) AVEC TRETA-0.3 ET L'ESTIMATION ASCATAL 77 subrouting erril2[agtern].erreut.; include common' integer ind.q persenter(up102) integer i integer i sol if Asternhar(d).Astern1(d.d).erreut.i(d).j.erreut.(d) je0.0100 do indel.d=1 .d logAU(ind)=0.d0 logA1(ind)=0.d0 Acfg(ind)=0.d0 AC:u:... encko ind=i if (x[ind] =.s(antirgz(i)) then logAJ(ind] = log(I=x(ind) + do J i=t.nn logAI(ind) = log(I) + log(z(antirgz(i))) = log(I=z(ind) = log(I=x(ind) + log(I=z(ind) = log(I=x(ind) + log(I=x(ind) 700 17 continue logAl(ind)=logAl(ind)/dbletnn) = log(l=x(ind)) enddo do l=1.q erreuril(1)=0.d0 ---4do ind=ins-goto 700 addi advec[antirgz(nn]) if [k:(ind).le.aux; them if [k:(ind).le.aux; them if [k:(ind).le.atantirgr(kl=1);] then do 36 j=1,k2 logA0(ind)=logA0(ind)=log(1=tantirgr(i);)) -to[git(antirgr(i))] -to enddo do !=1,g do ind+1,g-1 err@urLll1=err@urLl(1)=abs(Astambar(ind)=Astarn1(ind,1)) errourLill:errourLi() enddo do l=1.c errourL(1)=errourL1(1)\*0.01d0 enddo 800 801 end \*\*\*\*\*\* end PROCEDURE CALCULARY L'EXAMINE LI EMTRE LA PONCTION ASYMETRIQUE (A2) ET L'ESTIMATION AREATTI. 26 continue logAl(ind)=logAl(ind)/dble(nn) +dble(k2)\*log(x(ind))/dble(nn) +(1-dble(k2)/dble(nn)\*log(1-x(ind)) Acfg(ind)=sep(p)(ind)\*logAl(ind)) + (1-pl(ind)\*logAl(ind)) 27 . else Astarnber(ind)=0.0078125d0\*(15\*(j)\*\*2-6\*)+L19) ind=ind+1 goto #Cl poto %:endif
k2=k2=i
goto 800
endif
if (ind.ls.d) then
do 28 i=1.nn
logA0(ind)=logA0(ind)=log(1=x(antirgx(i)))log(x(antirgx(i)))
--\*(ind)(dble(nni + log(x(ind)))
-\*\*(ind)(dble(nni + log(x(ind))))
-\*\*(ind)(dble(nni + log(x(ind))))
-\*\*(ind)(dble(nni + log(x(ind))))
-\*\*(ind)(dble(nni + log(x(ind)))) end11 1=1=0.01d0 endio do lel.q eendio eendio do lel.q do indel.d-i srreurLi(1)=erreurLi(1)+abs(Astarnbar(ind)-Astarni(ind,1)) enddo do lel.g do led.g-1 errewrLl(l)=errewrLl(l)=abs(Asternber(ind)=Asternl(ind.l)) enddo enddo enddo do 1=1.q arreutL(1)=erreurL1(1)\*0.01d0 enddo end end PACCEDURE CALCUTANT L'ERRETE LI DEFRE LA FORTION AFMENTELQUE (A4) (Astarnher) FT L'ESTIMATION Ascarni. subroutine arril(Antarni,erreur) include 'commun' integer ind.q persameter(q=100) infedger l real's Ascarnhar(d),ascarni(d,d).arreurLi(d),j.erreurL(d) jed.01d0

۰.

#### Annexe G

Programmes informatiques de fortran 77 utilisés pour l'analyse 2 PACHAMENE MEINELINAL CALCULANT LES VALEURS DU TAU DE REMERALL ET DE L'ERRERR LI ROIR DES ÉSTEMATIONS DE LA PONITION À PAR LES RETRODES DE JOE ET AL., DE DENOURAI, ET DE CAMPAL ET AL., À PARTIR D'ECHANTILLORS DE TATLLE 50 ou 100 DE CUMUES DE COMPEL 5 DU DE COPULE ASTMETRIQUE DE TAMM S DE CONNECL & GU DE COPUER ASTHETRIQUE DE TAAM program amalyeel integer m. d.q.g.k.t. parameter [n=160,ni=100,d=160,d=160,d=160] real=8 mi(d.d).serverLi1(d).tau(d.d).drwnd.AJ(d) real=8 mi(d.d).serverLi1(d).d).serverLi(d).tau(d.d) real=8 mi(d.d).serverLi1(d).d).serverLi(d).tau(d.d) depart.dramdd) depart.dramdd) jopen(J.flipe-reand); open(J.flipe-reand); open(J.flipe-reand); call gumsymi(depart.u.v) call gumsymi(d encido encido enido call erriG51(Al.erreurL1) do l=1.g q arraurLl1(j,1)=arraurLl(l) enddo do i=1.q cs.i: qumsymi(depart.u.v) cs.i: hhoSOlo(u.v.tau(),i).A) do indui.q.i.ai(ind) enddo enddo call eriUER(AL,erreuril) do 1=1.q erreuril(j,l)=erreuril(1) enddo enddo call eriUSI(AL,erreurLl) do lel.g erreurLl[j,l]=erreurLl[] AI(Ind, 1)=A(ind) endin endin Call efficii(Al, effecti) do j=1,q q =rrwurLli(j,l)=erreurLl(l) enddo du lal.g js5 csll gramymi(dapart.u.v) csll CPGl(u.v.tear().l.A) do kad=1.d-1 Al(Ind,1)=A;Lnd) enddo enddo eshdo call erriGEI(Al, errwufil) do l=L.q errsufil(),l)=erreufil() enddo do l=1.q j=f call gungymlidagart.u.y1 cal khad05(u.y.tau(j,l).A) do ind=1.d=1 Al(ind,l)=A(ind) endio call eriGM2(A1.erreurL1) do 1=1.q erreurL1(j,1)=erreurL1(1) As the ending reliferings: [AL erreufi] do lei.q erreufi][j,l]=erreufi][] endio endio call erriGS1(Al,erreurLi) do lel.q arreurLil(3,1)=erreurLi(1) cm.te. encide do lel.q jst call gumsyml(depart.u.v) call jse50l0(u.v.tau(j,l),k) '-T.d-L `''+A(ind) enddo enddo call erith2(al,erowri) da l-1.q errowril(j,1)+errowri(i) endis cali erriGE2(AL,erreurLl) de l=1,Q prreurLl1(),1)=erreurLl() anddo enddo cmil eriddi(Ai,erreurij) do lai,g erreurij(j,j)=erreurij() endido do l=1,q j=12

۲.

call gomeye3(depart.u.v) call kbo5010(u.v.teg(j.1).A) de ind=1,d=L Al(ind,1)=A(ind) nddo endio rell erriGE3(AL.erreurL) do 1=1.q erreurL11(j.1)=erreurL1(1) endo call erriGE3(Al.erreurL1) do lel.q erreurL1([,1]=erreurL1(1) enddo do i=t.q do i=1.q j=16 coll gummyn1[depart.u.v? coll joe3010[u.v.csu(j.l).A) do ind=1.d=1 AI(ind, l)=A(ind) 440 endeo call scritäl(AL, erreurL1) do l=1.q erreurL1(1,1)=erreurL1(1) endo endo j=1.q call gumsyml(depart.u.v) call CTOL(u.v.tau(j,i).A) do indel.d-i Al(ind,1)=A(ind) enddo enddo do indel.d-1 A2(ind)=0.d0 enddo call errIGS3(Al.srreurLl) do l=1,q erreurLl(j,l)==rreurLl(l) enddo call erriGEI(AI,erreuril) do l=1,q srreuril1(j,1)=erreqril()) wrdio do l=1,q j=17 call quanymin(depart,y,v) call khol0020(u,v,tau(1,1),A) do ind=1.d=1 Al(ind,1)=A(ind) enddo enddo cil eri(SI(Al.ereuri) do l=1.g erreuril(j,1)=erreuri(1) endio call erriGEl(Al.erreurL1) do [=1.g erreurL11(),1)=erreurL1(1) enddo call err[GE1(Al.erreurL1) do l=1.g erreurL1(j,l)=erreurL1(l) enddo do i=1.q \_=10 call grownyw4(depart.u.v) call CTO2(u.v.tau(],1),A) do inds:,4-1 Ai(ind,1)=A(ind) enddo call err[GE1(Al.sermurL1) do lel.q errourL1(j,1)=errourL1(1) enddo do l=1,q j=21 call gwmaym5(depart.u,v) call khol0010(u,v,tau(j,l).A) do ind=1,d=1 Al(ind,l)=A(ind) anddo call eriGE2(A1,erreurL1) do 1=1.q \_\_\_\_\_erreurL1(j,1)=erreurL1(1) do l=1, c j=12 csl1 gummyw5(depart.u.v) csl1 khol0020(u.v.tsu(j.l).A) do ind\*1, d=1 Al(ind,l)=A(ind) endos cali errIGE2(A1.erreurL1) do lel.q erreurL1(j,1)=erreurL1(t) enddo call erriCS2(A1,erreurL) de 1=1.q erreurL11(j,1)=erreurL1(1) errourtil(;,i)=errourti(;) de l=l.q j=24 call queeym5(depart,u,v) call joel8020(u,v,tau(j,l),k) do ind\*1,d=1

114

Al(ind.1)=A(ind) enddo da 1=1,q enddo enddo enddo Call erridg:(Al.errourus, do l=1.q errouril(j.l)=errouril(l) Gw =
enddo
eff(u)
eff(u) endos cali erriG33(Al.erreurL1) do lel.g erreurL11().l)=erreurL1() enddo cali errigi(Al.erreuri) do lei.q erreuril(j,l)=erreuri(() Gu. -enddo -t.c i=10 call goueyn6(depart.u.v) call goel0010(u.v.tau(j.l).A) do ind=1.d=1 Al(ind.l)=A(ind) -dn -~=rt\_l) endio Call erriGS3(AL.erreurL1) do lei.q erreurL11(j,l)=erreurL1(1) endio call erricg3(Al.erreurL1) do lel.q erreurL1(j,l)=erreurL1(l) enddo do l=1.q do l=1.q
 j=30
 call gumaya6(depart.u,v)
 call CPC2(u,v,tsu(j,l),A)
do ind=1.d=1
 Al(ind,l)=A(ind) encido encido enddo call erriGg3(Al.erreurL1) do lei.q erreurL11(),1)=erreurL1(1) enddo do lel.c ioli conserval(depart.u,v) call kho505(u,v,tau(j,l).A) do indel.d-1 Al(ind,l)=A(ind) enddo enddo call eridABI(Al.erreurLi) do lel.q erreurLl(j,l)=erreurLl(l) enddo enddo cili eriQASI(Al,erreurL1) do lel,q erreurL11(j,l)=erreurL1(1) enddo call errIGAS1(A1, mrewrLl) do 1=1,g errmurLl1(j,1)=errewrL1(1) enddo call errichEl(Al.erreurLl) do l=1,q erreurLl(j,l)=erreurLl(l) enddo enddo call erriGASI(Al.erreuril) do l=1.q erreuril(j,l)=erreuril(l) enddo call err[1A5](A1,erreurL1) do 1=1.q erreurL1(1,1)=erreurL1(1)

call erriGAE2(Al.erreurL1) do 1=1.q erreurLl1(j.l)=erreurLl(l) endido do l=1.q enddo call erriGAS2(Al.erreurL) do 1=1,g erreurL11(j,1)\*erreurL1(j) two \_ the \_ t endio cail erriGAS2(Al.errourL1) do l=1.q errourL1(j,li=errourL1(1) enddo do l=1.q do l=1.q j=40 call gumasym2(depart.u.v) call CFG1(u.v.tsu(j,1).A) do ind=1.d=1 Al(ind.l)=A(ind) ended enddo cali eriGAEl(Al.erreurLl) do l=1.q erreurLl(),l)=erreurLl() enddo do l=1.g cali qumasyml(depart.u.v) cali khoSOS(u.v.tau(j,l),A) '' d-1 enddo enddo call erridAE3(AL,erreurLl) do l=l.q erreurLl(j,l)=erreurLl(l) call erriGA#3(Al.erreurLi) do 1=1.q q
erreurLl(j,l)=erreurLl(l) enddo call erriGAE3(AL.erreurL1) do l=1.g erreurL11(j,1)=erreurL1(1) enddo do lei.q call gumasyml(depart.u.v) call joed010(u.v.tau(j.i).A) do indej.ddi Al(ind,l)=A(ind) do l=1.q erreuril1(j,1)=erreuril(1) enddo call errIGA31(A1.erreurL1) do l=1.q erreurL11(j,1)=erreurL1(1) endio endio call erriGASI(Al.erreurL) do 1=1.q q errourL11(j,1)=errourL1(1) enddo cali erriGASI(Al.erreurLi) do 1=1.q erreurLi1(j,1)=erreurLi(1) Allenge enddo call erriGAS1(Al.errmuril) do lel.g errmuril1(j,l)=errmuril(l) enddo enddo je49 call gumasym4/depart.u.v: call jme10020/u.v.tau(j,i,i,A)

do inde1.d=1 Al(ind.l)=A(ind) endds call erriGASI(AI,erreurL1) de 1=1,q erreurL11(j,1)=erreurL1(1) enddo do 1=1.q i j=50 call gumasym4(depart.u.v) call CFG2(u.v.tau{j,l).A} do indel.d-1 Al(ind.l)=A(ind) enddo enddo call erriGASI(Al.erreurL1) do lel.g erreurL1(j,l)=erreurL1() enddo do l=1.q i je51 ce11 gumesym5(depart.u.v) ce11 kho10010(u.v.teu(j.j).A) do ind=1.d=1 Al(ind,l)=A(ind) enddo enddo endio call erriGASJ(AL, erreurL) do 1=1,q q erreurLl1(j,1)=erreurL1(1) enddo do le1.g j=52 call gunasys5(dmpert,u,v) call khol0020(u,v.tsu(j,l),A) del Al(ind.i)\*A(ind) enddo enddo cali errIGAE2(Al.erreurLi) do l=1.q .q erreurtil(j,1)=erreurti(]) enddo enddo call erriGAE2(AL.erreurL1) do l=1.c q erreurLl(j,l)=erreurLl(l) enddo do l=1.q : j=54 call gumasym5(depart.u.v) call joe10020(u.v.tau(j,l).A) do ind=1.d=1 Al(ind,1)=A(ind) enddo enddo call errfulAS2(Al,errfurLl) do lel.q errfurLll(j,l)=errfurLl() enddo do l=1,q j=55 call gumanym5(depart.u,v) call CPUZ(u.v.tau(j,l),k) /\*=A(ind) enddo enddo enddo chil eriGAS2(A1,erreurL1) do l=1.q erreurL1(),1)=erreurL1(1) endido do 1=1.q i j=56 cmll gumasymé(depart.u.v) cmll kho10010(u.v.tsu(j.l).A) do ind=1.d=1 AI(ind.1)=A(ind) enddo endde call erriGAEI(A1,errourL1) do 1=1.q q errourLl(j,1)=errourLl(j) enddo do 1=1.g Allind, 1)=A(ind) enddo call erriGAS3(Al.erreurL1) do 1=1.q q
errourLl(1,1)=errourLl(1) enddo do lel.q j=58 call goumasymf(depart.u.v) call josl0010(u.v.taw(j,l).A) do ind=1.d=1 Al(ind,l)=A(ind) enddo enddo call errIGAE3(A1.erreurL1) do l=1.q errourLl1(j, 1) -errourLl(1) enddo de l=1.q j=59 call gommaywei(depart.u.v) call joel0020(u.v.tau(j.l).A) de indel.d=1 Al(ind.l)=A(ind) enddo enddo csli eriGAEJ(Al.erreurij) do lel.g erreurij(j,l)=erreurij(i) 1 j=60 call gunarym5(depart.u.v) call GPG2(u.v.tau(j.l).A] L.d=1 Al(Ind.l)=A(Ind} anddo enddo call eg do lei. erriGAE3 (AL, erroutLL) q erreurfil(j,l)=erreuffi(l) ddo j=1,60 errilbar(j)=0.d0 errilcar(j)=0.d0 ramber(j)=0.d0 EQN(j)=0.d0

۰.

enu... k=1 do i=1,4 do j=k,k+4 do l=1.g



unll.unll.unl4.unl4.unl5.surgumbl.surgumbl2.r, pr. dramd. rand. pr. dramd. rand. compon /varl/ r compon / t (2-50, d=100, ==300, k=1, kasym=3) 112 112 emdi( susgnabl=uni5"\*(1/r)/(uni5"\*(1/r)+(1-uni5)\*\*(1/r)) if(uni4.le.l/r) then susgnabl=uni1\*uni2 else susgnabl=uni3 endif suuqumbi=uni5\*\*(1/r)/(uni5\*\*(1/r)-(1-uni5)\*\*(1/r)) if(uni4.1e.1/r) them suuqumb2=uni1\*uni2 elee suuqumb2=nni3 endif u(i)=surgumb2\*\*(auxgumb1/AfoncGB(auxgumb1)) v(i)=surgumb2\*\*((l=surgumb1)/AfoncGB(auxgumb1)) continue eurgumb2\*rill endif u(i)=surgumb2\*\*(surgumb1/AfoncGB(surgumb1)) v(i)=surgumb2\*\*((1=surgumb1)/AfoncGB(surgumb1)) Continue 211 11 CONCINNE MOCEDURE GENERALT SO COUPLES (1, v) DE COPULE ASYMETRIQUE DE TAME AVEC alpha-0.78 beta-0.97 et rol.42 211 EDDBL GDESRAFT 90 COUPLES (10,4) DE COPULE ASTNETRIQUE UE
head 07. betead 37 st ri.2
bead 07. bead 37 st ri.2
bead 37 st ri continue end ..... \*\*\*\*
stiguusb3\*uni3
endi{
uguubb1+exp(sturguubb1\*log(sturguubb2)/AfoneCDB(sturguubb1))
uguubb1+exp(sturguubb1\*log(sturguubb1))
uindag=0.D0
if 0.00.vindag=0.CB(.0.00.vindag.CB(.1.00)
if 0.00.vindag=0.CB(.1.00).
indag=0.trand(0)
vindag=0.trand(0)
vindag=0.trand(0)
goto 11f
endif
uili\*est(vindag\*\*(1/(1-a1)),uguubb1\*\*(1/a1))
v(1)\*est(vindag\*\*(1/(1-b1)),uguubb1\*\*(1/b0))
ontaines endif u(i)=auxgumb2\*\*(auxgumb1/AfoncGB(auxgumb1)) v(i)=auxgumb2\*\*((i=auxgumb1)/AfoncGB(auxgumb1)) continue 211 end PROCEDURE GENERALT 100 COUPLES (u.v) DE COPULE DE GAMERE DE TYPE & AVEC r=2 mutrovaline grammedidepart u.v) parameter (n:000, d=100, m=500, k=1, kasym=3) integer 1 real\*6 depart. • unil,uni2,uni3,uni4,uni5,aungumb1,aungumb2,r. • unil,uni2,uni3,uni4,uni5,aungumb1,aungumb2,r. • differences. AfoneCOMerym real\*6 wina; v(n) comment / wi 114 311 311 CONTLIGUE end PROCESSOR GENERART SO COUPLES (U.V) DE CUPULE ASYMETRIQUE DE TAME AVEC sipha=0.78. beta=0.97 et r=2.58 CONTINUE DDME COMMELSY 10 COUPLES (u,v) DE COUPLE AFYMETRIOUE DE mac-0.78, beta-0.97 et c-2.38 substutine gumasymel(depart.u.v) integer n. d. m. k. karym paremeter (m=50, de)00, m=500, k=1, karym=1) integer i (m=50, de)0, m=500, k=1, karym=1) integer i (m=50, de)0, m=500, k=1, karym=1) integer i (m=50, de)0, m=500, k=1, karym=1) common /wst2/ sl.bs Common /w 112 :113 ungumbl=uni5\*\*(1/r)/(uni5\*\*(1/r)+(1-uni5)\*\*(1/r)) if(uni4.le.l/r) then ) then sungumb2=uni1=uni2 else sungumb2=uni3 endif sungumb2\*\*(aungumb1/AfoncOB(aungumb1)) v(i)eeungumb2\*\*((i-eungumb1)/AfoncOB(aungumb1)) minue 211 end PROCEDURE GENERANT 100 COUPLES (u.v) DE CONVLE DE GAMBEL DE TYPE & AVEC r=4 subrouting gunsymé(depart, u.v) integer n, d. m. k. kanym parameter (n:100, m=500, k=1, kanym=3) integer 1 real?# depart. indif sumgushi=sup(log(uni5)/r)/ (exp(log(uni5)/r) + exp(log(1=uni5)/r)) if(uni4.le.l/r) then sumgush2=uni1=uni2

intra 1 ndi £ endif e mbl=log(aungumb2)/AfoncGB(aungumb1)) ungumb1)\*log(aungumb2)/AfoncGB(aungumb1)) 114 endif ufi)=sam[uindmp\*\*(1/(1=s1),ugumbs1\*\*(1/s1)) ufi)=sam[vindap\*\*(1/(1=be)],vgumbs1\*\*(1/be)) Upu [Bd0 1700 0 111 i=1, n 0 112 i=1, n 311 311 CONTLONG and MCCERUME GREENART 10 COUPLES (1... v) DE COPULE ASYMETRIQUE DE TAME AVEC alpha=6.78. beta=0.57 et =>50 113 ..... . 113 114 \_ 111 111 CONTINUE end PROCEDORE CAREBART 100 COURLES (L.+) DE CORULE AITMETRIQUE DE TAMMA AVEC elphano 78, Detano 17 eC gr50 DDDM GSFELAFT 100 COUPLES (L.v) DM COPULE ASTMETRIQUE OF med.78. betael.77 er (rs5 ullFobtliss gummsym6/deport.u.v) integer n. d. m. k. kesym parameter (rs100, d.d.d.m.s500, kel. kesym=1) integer n. d. m.k. kesym parameter (rs100, d.d.d.m.s500, kel. kesym=1) integer n. d. m.k. kesym parameter (rs100, d.d.d.m.s500, kel. kesym=1) integer n. d. m.k. kesym parameter (rs100, d.d.d.m.s500, kel. kesym=1) integer n. d. m.k. kesym parameter (rs100, d.d.d.m.s500, kel. kesym=1) integer n. d. m.k. kesym parameter (rs100, d.d.d.m.s500, kel. kesym=1) integer n. d. m.k. kesym real-9 u(n). v(n) Common /vs21/ s1.bs determal lyvsiseys. (gvrsis mitsernal fords, AfonctBasym res5.d0 al-d. 78dd b=-0.76d do ll 101.n unii=0.00 unii=0.00 unii=0.00 if(unii.Eg.0.00). (uni2.LE.0.00). C. d. unii.Eg.0.00, (uni2.LE.0.00). C. d. unii.Eg.0.00, (uni2.LE.0.00). C. d. unii=0.00 unii=0.00 unii=0.00 (unii=0.00 unii=0.00 unii=0.00 unii=0.00 (unii=0.00 unii=0.00 unii=0.00 (unii=0.00) unii=0.00 uni=0.00 unii=0.00 uni=0.00 uni= ulso exist; uqumbplecp;sucqumblile(gieucqumbl)/AfoncGB(sucqumhl)) uindspo0.50 vindspo0.50 Lf (uindsp.02.50.50.50.vindsg.CB.1.00) Lf (uindsp.02.10.50.50.vindsg.CB.1.00) Lf (uindsp.CB.10.50.50.vindsg.CB.1.00) Lf (uindsp.CB.10.50.50.vindsg.CB.1.00) Lf (uindsp.CB.10.50.50.vindsg.CB.1.00) uindspodram(10) uindspodram(10) uindspodram(10) uindspodram(10) uindspodram(10) uiti maxi(uindsg\*\*(1/(1-al)),uqumbal\*\*(1/al)) v(1)=maxi(uindsg\*\*(1/(1-b)),uqumbal\*\*(1/b)) uitinss 114 . 311 continue PROCEDURE GENERANT IGO COUPLES (U.V) OR COPULE ASTRETRIQUE DE TAME AVEC alphano.70, beta=0.57 et t=1.42 DDEE CENERARY 100 COUPLES (u, v) DE COPULE ASTRETRIQUE D and.7s, bactand.57 et =:1.42 subroutine gumasysk(depart.u.v) intGept n. d. m. t. kanym persmeter [m:100, d=:000, m:500, ksl. kanym=3) persmeter f depart. - unit.uni2.uni3.uni4.uni5.suurgumb1.euugumb2.r. - pt. drand.rmnd.ugumbs1.rgumb1.uindep.vindep. - nfoncCB. AfoncGBasym.al.be Common /wabd1/gt m common /wabd1/g 113 units endif upumbel=exp(il=surgumbl)/AfoncGB(surgumbl)) uindep=0.00 if (uindep-0.00.00.00.vindep.EE.0.00. uindep=0.00.00.00.vindep.GE.0.00. uindep=dramd(0) vindep=dramd(0) vindep=dramd(0) uindep=dramd(0) endif e 114 . 113 311 PONCTION ARTOUNNANT LA VALEUR DE LA PONCTION DE DEPENDANCE D'UNE COPULE DE TYPE GUMBEL S. DE FANARETE T==1 real=4 tunction AfoncOB(t) real=4 t.r fommon /Wmi/ r AfoncOB=(11-c)=\*c = t=\*c|=\*(1/c) end and goto Lia modif annyambi wang (log (uniš)/r)/ annyambi (ung (log (log (log (l-uniš)/r)) if(unić.is.l/F) the annyambi watil\*uni2 elas antyambi watil antiteunstaweuti3 upmabel=emp(suspumbl)\*log(eunspumb2)/AfoncGB(suspumb1); uindup=0.00 vindup=0.00 if (uindup.G.D.O.GK.vindug.Zg.0.DO. dR.uindup=C.CR.L.O.GK.vindug.Zg.0.DO. then uindup=dramd(0) veco jit uindup=dramd(0) veco jit uindup=dramd(0) veco jit u(1)=ems(vindup\*\*1/(1==1);.ugumbel=\*(1/b); v(1)=ems(vindup\*\*1/(1=b);.ugumbel=\*(1/b); unting= end FUNCTION RETOURNANT LA VALEUR DE LA PONCFION DE DEPRESANCE D'UNE CUPULE DE TYPE ASTRETRIQUE DE TYMM, DE PARAMETRES F=-1, et 0 4- a, b 40 1 114 real\*8 function AlonoOberymit) real\*8 t.r. el.be common /vag2/ al.be AlonoOberymit-Dev(Deval)\*t+ ((ba\*(l-t))\*\*T + (al\*t)\*\*t)\*\*(1/T) 311 PROCEDURE CALCULARY L'ESTIMATEUR DE JOE ET AL. AVEC UN SERVIL DE 3/50 FOUR UN ECHANTILION DE TAILLE 50 IL Cuttanne end POCIDIZE GENERANT 100 COUPLES (u.v) DE CUFULE ASYNETRIQUE DE TANN AVEC elpha-G.T. beca-0.97 et ce2.58 subroutles jos505(stree.yruc,tsut7.Astarn) include 'commun50' incleger rgg(in) rgy(n), entirgs(n), entirgy(n).entirgr(n). ind.astar,i,j real\*8 strec(n),typec(n), sord(n), yord(n).pes.tord(n) real\*8 strec(n).(d).S.e(n) subroutine gumssym5(depart.u.v) Interes u. d. m. k. karym parameter (me100. d=100. m=500. k=1. kasyme3)

real-s and rmpi") taut?.taus.integ(d) rml\*0 (),tin?.tin; ds 199 inde1.d t i ind)=dble(ind)/dble(d) continue 199 continue past[1]-c[1] notar-10.00 call inducx(n,yvec,antirgy) de J01 ist,s andfil=nvec(antirgy(1)) yord(1)=yvec(antirgy(1)) continue 10L call rank(m.sml:npx.rgx) call rank(m.sml:npx.rgy) call rank(m.sml:npx.rgy) call:sl.d/log(dble(n)/(dble(rgx(i))-0.5d0)) z1(i)=1.d/log(dble(n)/(dble(rgy(i))-0.5d0)) continue de 305 inde1.d-1 B=(1-t(ind))/t(ind) 102 do 106 i=1.n g=8\*x211; 11 (11(1).GT.G) then 4(1)=x1(1)/m 4(1)=21( else a(1)=Q/D endit 306 endio call index:(n,e,astirgt) do J03 1=1,n tord(i)=e(astirgt(i)) tord(i)=0 continue sum=0.d0 j=20.d0 d0 304 i=31.45 sum=tord(i)=j=sum j=j=1.d0 endim 103 304 Astern(ind) =t (ind) \*sum/15.d0 305 chil taufft, pes, Antarn, taut7, taus, interi ING E CALCULART L'ESTIMATEUR DE JOE ET AL. AVEC UN SEUTL DE 10/50 POUR UN PROCEEDING CALCULARY real\*6 faut7, taus.integ(d) real\*6 (), x1(n), x2(n) do 199 indel.d tindel.d continue 199 continue guest(2)-ctil mscar-l0.dD call indexcin,vvsc.antirgmi call indexcin,vvsc.antirgmi do 301 it.n mort(1,vvsc(antirgv(1)) continue call indexc(antirgv(1)) continue call indexc(antirgv) call ind 101 call m call r do 102 i=1, m E1(1)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgm(i))=0.540)) z2(1)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgm(i))=0.540)) East----continue do 105 indei.d-1 do 105 indei.d-1 do 105 isl.a QuB\*z2(i) if (z1(i).GT.Q) then e(i)=z1(i)/n 302 e(i)=zi: blau e(i)=Q/m endif 106 call indeporte.e.antirgt: do 103 i=1.n cord(1)=etentirgt(1)] tord(i)+e entline mu=0.d0 j=10.d0 do 106 1=41.45 mu=tord(i)\*j=tum j=j=1.d0 entlo 303 104 Astarn (ind) =t (ind) \*mm/5.40 305 call taufit.pas,Astern,taut7,taus,integ) end PROCEDURE CALCULART L'ESTIMATEUR DE JOE ET AL. AVEC UN SEUTIL DE 10/100 POUR DE ECHANTILION DE TAILLE 100 eubroutine jesi0010/xvec,vvec,taut7,Astarn) include 'commi00' linclude 'commi00' include 'commi00' include 'commi00', environ, entirge(n), entirgy(n),entirgt(n), real\*0 kwec(n),vvec(n), xvec(n), yerd(n),pes,tard(n) real\*0 kwatern(d),c(d),s.e(n) real\*0 kwa real's man real's caut7.taum,integ(d) real's (J,lin), z2(n) do 195 index.d tind>=cols(ind)/dble(d) continue pas=t(2)-t(1) nstarv20.dd call indexc(n,yvec.antirpy) do 301 i=1,n source(interpret(intirpx(i)) realismetry) continue continu 159 301 continue cali Tenk(n,antirgy.rgy) cali Tenk(n,antirgy.rgy) do J02 isl.n.d0/log(dbls(n)/(dbls(rgy(1))-0.540)) rl(i)=1.d0/log(dbls(n)/(dbls(rgy(1))-0.540)) rl(i)=1.d0/log(dbls(n)/(dbls(rgy(1))-0.540)) Idiar Indel.d-1 do 105 indel.d-1 do 105 indel.d-1 do 105 inl.n Q=0"x2(1) if (s1(i).07.0) then o(i)=s1(i)/n 302 e(1)=E1() else e(1)=Q/n endif 306 endio Call IndextE.s.entirgt) do 303 Lel.n tard(1)=e(entirgt(1)) card(1)=a run=0.d0 j=10.d0 do 104 i=41.95 du=Cord(1)\*j=eum 303

" ⊑vec(1)=0.d0

j=j=1.40 endio Astarn(ind)=t(ind)\*#xm/13.40 endio 304 105 call touf(1.068.Astarn.taut7.tous.integ) EAAT COME (L. DES ARTERT, LELL', CAME INLEY, MOCHOUR CALCULARY C'ESTINATION DE JOE NY AL. AVEC DE SECIL DE 10/100 FOUR DE FERMITILAS DE TAILE 10 Subroutine josi0020(xvec, yvec, test7.Astern) include 'communio' integrer rege(n), erg/(n), entirgy(n), entirgt(n). ind, meter, i, j real=5 xvec(n), yvec(n), xord(n), yord(n), pas.tord(n)
real=6 Astarn(d), t(d), 8, e(n)
real=0 mm real\*E taut7.taus.integ(d) real\*E (J.z1(m),z1(m) do 199 ind=L.d \_\_\_\_\_\_t(ind)=dble(ind)/dble(d) c(ind)=dble(ind)/dble(d continue pase(13)-c(1) mstar=10.00 csl1 indust(n,yvec,entirys) csl1 indust(n,yvec,entirys) do Jol Lel,n mort[]]=wwec(sntirys(i)) yort[]]=wwec(sntirys(i)) intermediates. 199 301 continue ak(n.entirgs.rgs) ak(n.entirgy.rgy) call rs tail:=nuk(n\_astlingy.ru/ do 302 :=lik(=1.d0/log(dblein)/(dbleinge(l))=0.3d5)/ zlik(=1.d0/log(dblein)/(dbleingy(l))=0.3d5)/ zlik(=1.d0/log(dblein)/(dbleingy(l))=0.3d5)/ Eilir---do 305 indel.d-1 do 305 indel.d-1 do 306 iel.n g===22(i) if (zi(i).GT.Q) chen if (zi(i).GT.Q) chen 102 etti=Q/n endif 306 call indeperin.e.antirgti do J03 1=1.a tord(1)=e(antirgt(1)) Cord(1) =q {antirut(1) etus=0.40 j=10.40 do 106 i=91,95 sumercor(1); \*j=rum j=j=1.40 enddo Astarn(1nd)=t[ind)\*sim/5.40 enddo 303 104 305 call taux(t,pes.Astarn.taut7.taus, integ) end PHOCEDURE CALCHLAFF L'REFTLAFERT DE RHOUDRAFT AVEC UN SELIL DE 3/30 POUR UN BENANTILION DE TATLE JO Aubroutine kha505(s/s/s/, ywsc, teuti, Astarn) include "commun50" integer profin, rdy(s), satlropr(n), antirpy(n), inter(n), i.ad, nstar. real-real (n), yracf(n), rwsc(n), wesc(n), rear attar(n), yracf(n), rwsc(n), wesc(n), rear real\*# Amaum, aux(1, Auxil2, Astarn(d).t(d) real\*8 Eau(1.2mm, integ(d) do 199 ind=1, d Efind=chisinind/dble(d) continue pass(2)-ctl) rear21=5.d0 nstar=0.d0 199 nstared.dd Call indepx(n.rvsc.astirgs) call indepx(n.rvsc.astirgs) dd IdI i=l.n xord(i)=vvsc(astirgs) yord(i)=vvsc(astirgs(i)) yord(i)=vvsc(astirgs(i)) continue call rank(n.astirgs.rgs) dd i=i.a rvsc(i)=d.dd endda 101 endif continue do lO3 k='.astar www.tkiwstaristarik)/rvectistarik) do lO4 ktore do lO5 k='.astar do lO5 k='.astar uniliwwww.tki\*(t(ind)) uniliwwww.tki\*(t(ind)) if (uuriligo.suuli) then annu=Annux\*exuili sing 102 203 Angust=Angust=Angust=auxill Angust=Angust=auxill2 endit continue Astarn(ind)=2.d0\*Anaux/dble(nstar) continue call taugit.mag. Astarn. tauti. taus. 16100) PROCESSING CALCULARY L-THETDALYEUR GE KHOUDRAJI AVEC GM SEUIL DE 10/50 POOR UM BERAMTILLOR DE FAILLE 50 subrouting khošili(svec.yvec.tautl.Astarn) include 'commund0' integer Teps(n), rug(n), matirgs(n), astirgy(n). • (atar(n), vec.(n), rug(n), pas. • rultef(n), yvec.(n), rug(n), pas. • tatar(n), yvec.(n), rug(n), pas. continue pase(12)-c(1) rstar2]-10.d0 call indemo:(n,rwcc.sstirgy) do l0 i=1.n yord()=uvec.sstirgy) do l0 i=1.n yord()=uvec.(sstirgy(i)) continue call rank(n,sstirgy,rgy) do l=1.n restirut,story,rgy) do l=1.n

<pre>mmtar(1)=1.dd/log(dhls(n)/(dbls(rgr(1))-0.5d0)) ymtar(1)=1.dd/log(dhls(n)/(dbls(rgr(1))-0.5d0)) rws(1)=sets(1)=vmtar(1)</pre>		<pre>* logk0(d), logk1(d) real*% u[n], v[n], B(n), sord(s)</pre>
16 (FVNC(1).gt.fHEAGE1) then natarumatarol natarumatarol	199	an is indi-dhe(indi)/dhe(i) x(indi)-dhe(indi)/dhe(i)
andif 107 continue		paratit) do lo indisl.d pliindi)=1-x(indi)
do 103 mal, Astar www.clk)mutar(latar(k))/rww.clatar(k)) 103 dentime	10	concine some.0.200 some.0.400
do 194 indel.d-1 Anatice 0.d0		da 99 indist.d eugasfg(indi)=t.000
euxil/euxil/euxer(k)*(t(ind)) euxil/euxer(k)*(t.d0-t(ind))	19	Actg (Indi)-0.000 continue do 12 ist.a
if (sumill.ge.sumill) then Asiann-Anauntosumill	12	<pre>x(1)=log(u(1))/(log(u(1)*v(1))) continue</pre>
anaux Anaux Anaux Anaux Anaux		(a) Triest(i, x, antirg:) (b) T7 i=l.n sort(i)≠s(antirg:(i))
105 continue Astarn (ind)=J.d0*Anaux/dble(fistAf)	17	do indel.d
call truck(t, pas, Astarn, Cauti, Laus, integ) and		logu((ind)=0.d0 logk1(ind)=0.d0 log(1=0.d0
PROCEDURE CALCULARY L'ESTIGATEUR DE KONDURAJI AVEC UN SEUIL DE 10/100 POUR UN ECHNATILION DE TATLE 100	760	endda Indel 19 (arfad) Im.mfantiowy(1)), chan
autrouting hhstolic(xvac,yvac,tauti,Astarn)		logA0(ind) = log(1-s(ind)) do 17 i=1.n
inclose 'committe' integer rgs(n), rgy(n), antirgx(n), antirgy(n), • istar(n),k,ind.natar,i	17	<pre>logAl(ind)=logAl(ind)+log(x(antirgr(i)))- + log(i=x(antirgr(i))) continue</pre>
<pre>real*8 xvec(n), yvec(n), xord(n), yord(n),pas,</pre>		<pre>logAl(ind)=logAl(ind)/dble(n) + log(1=x(ind)) nousl(ind) = exp(pl(ind)*logA0(ind)*</pre>
real*6 tauti.caus.integ(d)		<pre>* (1-pl(ind) * logAl(ind) *</pre>
do 199 ind=1.d t(ind)=dbie(ind)/dbie(d)		ind=ind+1
page(12)-tl) rstar21=10.d0		eneli k2=1 euros (encircos (n))
nstsr=0.d0 csll indust(n.xvec.antirgx) csll indust(n.vec.antirgx)	800 601	if (x(ind).le.eux) then if (x(ind).le.fantiryx(k2+1))) then
do 101 1=1.n xord(1)=xvec(antirgx(1))		<pre>uo 20 1=1,12 logA0(ind)=logA0(ind)-log(1=x(antirgx(i)))</pre>
yord(1)=ywec(antirgy(1)) lot continue cell rank(n.antiron.run)	26	continue logA0(ind)=logA0(ind)/dble(n)
cali rank(n.antirgy.rgy) dn i=i.n		<pre>* * * * * * * * * * * * * * * * * * *</pre>
rvec(i)=0.d0 enddo do 102 1=1.a	77	<pre>logAl(ind)=logAl(ind)=log(z(antirgz(i))) * -log(l=z(antirgz(i))) </pre>
<pre>xstar(i)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgx(i))=0.5d0)) ystar(i)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgy(i))=0.5d0))</pre>	•	<pre>iogAl(ind) = logAl(ind) / dble(n) *</pre>
rvec(1)=KEKAr(1)=VECAr(1) if (rvec(1)_gf_rstar21) then nacarumstar=1		<pre>* *(1-dble(k2)/dble(n))*log(1-x(ind)) nousl(ind)*emp(pl(ind)*logA0(ind) * * (ind)*logA0(ind)</pre>
istarinstar)=i endif		nous2(ind) + map(p2(ind) * logA0(ind) * (1-p2(ind)) * logA1(ind))
do 103 k=1,nstar www.(ki-mstar(istar(k))/rwwr(istar(k))		indoindei goto toi andig
103 CONTINUE do 104 inde1.d-1		k2=k2+1 _goto 400
de 105 k=1.marar aurill=vvmc(k)*(r(ind))	990	endir Lf lind.le.d. then do 28 i=1.a
auxil2s(1.d0-wwwe(k))*(1.d0-t(ind)) if (auxil1,ge.auxil2) then		<pre>logA0(ind)=logA0(ind)+log(1-=(antirgz(i)))-</pre>
else Arstix-Arstix-euxill	**	logA4(ind)=logA0(ind)/dble(n) = log(stind)) logA1(ind)=log(stind))
endi: 105 continue Astary (odia: ditensi (otia)		zowsi(ind)=exp(pl(ind)*logA0(ind)+(1-pl(ind))*logA1(ind)) zowsi(ind)=exp(pl(ind)*logA0(ind)+(1-pl(ind))*logA1(ind)) todarada
104 continue call toukit.pes.Astern, Eauti.teus.integ;		goto 900 endif
ena PROCEDURE CALCULART L'ESTIMATEUR DE ENGUDERTI AVEC UN SEDIT. DE 20/100 PUER UN		Call ChuK(x, per, nousl.taut, faus, integ) end
ECRAPTILLON DE TAILLE 100	TAI	INDRE DE CALCUL DE L'ESTIMATEUR DE CAPERAA ET AL. FOUR UN ECHANTILLON DE Lle neto
include 'communi00' integer fux(n), fyy(n), Antirgx(n), Antirgy(n),		subrourine CPG2(u.v.taut.nousi) integer n. d
real® wvec(n), yvec(n), mord(n), yord(n),044, xstar(n), yvec(n), word(n), vec(n), rstar21		parameter (matol, delo) integer 1, ind. indi, k2, antirgs(n) twalfe some, simo, aux, nag. taut, taum
reel*# Anaux.auxill.euxil2.Astern(d).t(d)		<pre>resi*# x(d), surkcfg(d), Acfg(d), integ(d), p1(d), * ingA0(d), logA1(d) * integ(d), logA1(d)</pre>
de 199 india ( data ( ind) / dbla ( d)		do 199 indi=1.d x(indi=1.d
199 continue page(2)-(1) rerection 40	199	continue pamerk(2)=x(1)
nataf=0.d0 call inducx(n.xvec.antirge)	10	pl(indi)=1-x(indi) continue
call indexx(n,yvac.antirgy) do 101 i=1,n autolijaarvac(antiruz(i))		totnu=0.000 #omr=0.000 do 91 india1 d
yord(1)=yvec(antirgy(1)) 101 cmctinum		aunActelindi)=1.000 Actelindi)=0.000
call tank(n.antirgy,rgy) call tank(n.antirgy,rgy) do 1=1,n		CORLinus do 12 i=1,n x(i)=loc(u(i))/(loc(u(i)=v(i)))
rvec(i)=0.d0 enddo do 107 ist o	13	Continue Call index((n,z,antirgt)
um	77	tord(1)=g(antirgs(1)) continue
rvec(1)=mstar(1)+ystar(1) 15 (rvec(1).gt.rstar21) then		do indel.d logAf (indi=0.d0
nstar=nstar+1 istar (nstar) =1 endit		105A11201=0.00 Actg(ind)=0.00
102 continue do 103 k=1,astar unerticipaterticipaticip	700	indel 12 (xiind).le.x(antiryx(1)); then 12 (xiind).lex(d).de(1 = (1 = 1))
103 continue do 104 ind=1,d=1		do 37 isl.n logAl(ind)=logAl(ind)+log(z(antirgz(i)))+
Ansur=0.00 do 105 k=1.nstar auxillewwec(k)*(c(ind))	37	<pre>     log(1=t(antirgs(i)))     continue     logAl(ind)=logAl(ind)/dble(n) = log(1=t(ind)) </pre>
<pre>auxil2=(1.d0-wwwc(k))*(1.d0-t(ind)) if (auxil1.ge.auxil2) then</pre>		<pre>nousl(ind) = exp(pl(ind) * logA0(ind) +</pre>
Angurangurangurangurangurangurangurangura		<pre>npus2(ind) = amp(p2(ind)*logA0(ind)* * (1-p2(ind)*logA1(ind)) ind=ind*1</pre>
endi: 103 continue		gots 780 milli
Astarn(ind)=2.00*Abaux/dble(nstar) 104 continue call tauK(t, mag.Astarn, tauti.taum, inter)	800	surstantiggs(n)) 12 (u(ind),le.aux) then
	401	Lf (x(ind).le.z(antirgz(k2+1))) then do 26 [01,k2
PROCESSING DE CALCUL DE L'ESTIMATEUR DE CAPENAA ET AL. FOUR UN ÉCHAMTILLON DE TAILLE A-50		logaD (ind) = logaD (ind) + log (i = s (antirgs (i)))
***************************************	26	<ul> <li>-log(z(antirgz(i)))</li> <li>continue</li> </ul>
eubroutine CFG1(u.v.taut.nous1) integer n. d	26	<ul> <li>- log(z(antirgz(i)))</li> <li>continue</li> <li>logA0(ind) + logA0(ind) / dble(n)</li> <li>0 dble(22) * log(x(ind)) / dble(n)</li> </ul>
<pre>subroutine CFG1(u.v.taut.nous1) integer n. d parameter (n=50, d=100) integer 1. ind. indi, k2. antiys(n) fred*s couv. exc. nea. taut. taus</pre>	26	<pre>* -log(x(antirgx(i))) continue logA0(ind)=logA0(ind)/dble(n) * colle(k2)=log(x(ind))/dble(n) * (-dble(k2)*log(x(ind))/dble(n) * cl-dble(k2)/dble(n)=log(-x(ind)) dc 27 i=k2=1,n logAt(ind)=logat(ind)=log(cont(cont(cont(cont(cont(cont(cont(cont</pre>

integer ind.q rmal8 ra.a.b parameteri(=100.s=0.78d0,b=0.97d0.rs=1.43d0) integer : rmal=8 Asternhur(d).Asterni(d.d).errmurL(d).j.errmurL(d) 27 : . ind=ind+i goto 601 endif kl=k2+i goto 800 j=j+0.01 enddo do l=1.g erreurL1(1)=0.d0 enddo gwto === endif 900 if (ind.le.d) then do TE i=1,n logAG(ind)=logAG(ind)=log(1===(antirgz(i)))= log(x(antirgz(i))) do 1=1.q do 1md=1.d-1 ril(1)=errouril(1)=ebs(Asternber(ind)=Asterni(ind, 1)) enddo enddo do 1=1,C errwurL(1)=errwurL1(1)=0.01d0 enddo LogAt(ind) Log(x(ind)/dbie(n) + log(x(ind)) LogAt(ind)=logAt(ind)/dbie(n) + log(x(ind)) LogAt(ind)=log(at(ind)) moust(ind)=mop(pl(ind)\*logAt(ind)+(I=pl(ind))\*logAt(ind)) moust(ind)=mop(pl(ind)\*logAt(ind)+(I=pl(ind))\*logAt(ind)) Inde(ind+1 moto 900 end -----FROCHMORE CALCULARY L'EDREUR LI SWIRE LA FONCTION A ASYMMITATQUE DE TAMM AVEC alpha=0.78, beta=0.97 et r=2.58 FT L'ETENATION Astarti. Astarnbar(ind)=1-b+(b+a)=j+((a=\*r)=(j=\*r)=(b=\*r)=((1-j)=\*r))=+(1/r) j=j+0.01d0 j=j=0.01 enddo do l=1.q errautL(1)=0.00 endde do lel.d do indel.d-L errwuril(i)+errwuril(1)+she(Asternher(ind)-Astern1(ind,1)) do ind=:. enddo enddo do i=t.q erreut/(1)=erreuti(1)=0.01d0 enddo endio end MOCEDORS CALCULART L'EREGUR LI DYTRE LA FORCTION A AFMORTNIQUE DE TAME AVEC Alphae0.78, betae0.97 et r=50 ET L'ESTIMATION Astarni. subroutine erriGAGI(Astarni.erreurl) include 'computer ind.g real's ra.e.5 parameter (q=100.a=0.18d0.b=0.57d0.rm=50.d0) interer 1 Teal 30 rate, D
pursumeter (goil00, a=0.1860, b=0.8740, rue50.40)
integer 1
real 34 Asternbar(d).Astern1(d.d),errestL1(d),j.errestL(d)
j=0.0140
do indel.d-1
Asternbar(ind)=1-D+(D=a)\*j=((a=\*p)\*(j\*\*p)+(b\*\*p)\*((1-j)\*\*p))\*\*(1/r)
Asternbar(ind)=1-D+(D=a)\*j=((a=\*p)\*(j\*\*p)+(b\*\*p)\*((1-j)\*\*p))\*\*(1/r)
==dda fma.to ... parameters(q=100, rm=1.dO) integer i real\*# Astarnber(d).Astarni(d, d).etrusti(d).j.errmuri(d) real\*8 Ascal j=0.01d0 do ind=1.d=1 s, a=1 Astarnhar (1pd) = { (1\*"ral = ((1-j)\*\*ral ) \*\* (1/ra) j=j=0.01d0 j=j+0.01 enddu du l=1.g erreurL1(1)=0.d0 enddo anddo do 1=1,g erreurL1(1)=0.d0 enddo Golel,g doliddel,d-l errewrfil(1)+errywrfi(1)+abs(Astarnbar(ind)-Astarni(ind,I)) errewrfi(1)+errywrfi(1)+abs(Astarnbar(ind)-Astarni(ind,I)) enddo do lel.g do indel.d-l erreurii(1)=erreurii(1)+shs(Astarnhar(ind)=Astarn1(ind.l)) endo do l=1.g erreut[(1)=erreut[](1)\*0.01d0 endo enddo enddo do lel.d errauf.(l)=errauf.1(l)=0.01d0 erddo TIUTER DE DECLARATIONS DE VARIALAS COMMUNES AUX DIPPERDUTS PROCEAMMES IT SOCI-FROGRAMMES (COMMUNSO) ENCL. PROCEDURE CALCULARY L'EXAMPLE LE ENTRE LA PORCTION A DE TYPE GUNGEL & AVEC r=4 ET L'ESTINATION AGTATIL implicit none
implicit no Subroucine erricEl(Astarni.erreuri) include 'commun' integer ind.q parametror(q=100, ra=6.d0) integer i ral '4 Astarnbar(d),Astarni(d,d),erreuri)(d),j.erreuri(d) [=0.d0] do indbi(d-1) -1,G-1 Astarnbar(ind)=((j\*\*ra)+((l-j)\*\*ra})\*\*(l/ra) j=j+0.01d6 -PROGRAMMES 1. Implicit come integer a. d. nrepli paster (thick, delta, nrepli-de) paster (thick, b. parA. c. ord real\*d drabes, b. parA. c. ord common /varJ/ r. siphe, c. ord common /varJ/ parA excernal drand excernal drand transformer (ndamot. Lauk, reat, Ve enddo do l=l.q errwurLl(l)=0.d0 -~ddo enddo do 1=1.q do ind=1.d-1 , d=1 erreurL1(1) ==rreurL1(1) =ab#(Asternber(ind)=Astern1(ind, 1)) chine chine do le.g dol0.0°(1)firerreuri(1)°0.010 chine chin FOR LES MACENERE indexet, taux, rank, VOIR AMMERIE E

PROCEDURE CALCULART L'ERREEL L'ENTRE LA FORCTION A ASTRETALQUE DE TAMM AVEC alpha-0.7%, beta-0.57 et r-1.42 ET L'ESTIMATION Astrani. subroution (communic) Lociuma (communic)

#### Annexe H

# Programmes informatiques de fortran 77 utilisés pour l'analyse de données

	************	78	rend(2.*) dagav(1).v1(1)
MOGU	DE DEBRES CHESTINE DE MATER DE CAPERAS ET AL. SUR L'HERMITILISE De debres chestitue des mater de l'alcar		
	urannan welest		ul(j)=ul(1)
	Integer n. m. 1. j		∀2(])=V2(1) ]v1+1
	integer rux(n), ruy(n), entirux(n), entiruy(n)		endin tel
	reel*8 taet.x(m),x3(mm),x4(mm),x4(mm),x3(mm),u1(mm),x3(mm) reel*8 taet.x(m),y(m)		de 1-1#21,2730
	real*E transfx(n), transfy(n) comm(1, files*fart, 4*)		v1(j)=v1(j)
	dn 10 iwf.an		j=j=L endito
20	contine		j=1 da 1=2731_3731
	j=1 do i∈ll.nn		ud(j)=ut(1)
	x(j)=u1(1)		j=j+1
	j=j+1		endde cmll joel25(ul.vl.tmut)
	endidi de lel.n		print*, teut
	enddo call indeput(n.x.entirux)		print", teut
			cmil joelij(ul.vl.tent) print*,tent
	do i-L.n		cml1 jpd225(u4.v4.tmut) print*.taut
	enddo call rank(n,antirgx.rgx)		call khol25(ul.vl.teut)
	call rank(n.antirgy.rgy) do 11 iel.o		call kbol25 (u2. v2. cout)
	transfr(1)=dble(rgr(1))/dble(n+1)		print*, taut call khol25(u3, v3, taut)
11	continue		print", taut
	call CPGJ(transfr.transfy.taut.nousl) print*.taut		grint*, taut
	close(1)		call kholl00(ul.vl.taut) print*.taut
			Call kholl00 (u2, v2, cauc)
	PRIMARY CALLIANT L'EFTINTEUR DE CAPERA ST AL.		call hho1100 (u3, v3, taut)
	subroutine CFG3(u.v.taut.nousi) integer n. d.m., k. kasym		cmll khožičo (uš. vé, čaut.)
	perimeter (N=42, m=500, d=100, k=1, knsym=3)		print*, teut call khol200 (ul. vl. teut)
	real*I somv, soms, sust,		print".taut
•	pas.r.al.be.pt.srand, rand, taut real*# x(d), nousl(d), pl(d), logA0(d), logA1(d)		print*, taut
	real*8 bnousi(s)		call khollo0(u3,v3,taut) print*_taut
	rel*8 z(n), Lord(n)		call kho2200 (u4, v4, taut)
	common /varl/ r common /var2/ ml.be		end
	common /subdi/pt	8003	
	do 199 indi-1,d	*****	
199	r(indi;+dble(indi)/dble(d) continue		subroutine joel25(xvec, yvec, taut7)
	pas=m(2)-m(1) do 10 indial.d		integer rexemingio' integer rex(n), rey(n), antirgx(n), antirgy(n),antirgt(n),
10	pi(indi)=1-x(indi)	•	<ul> <li>ind. Astar. 1. j real*4 avectol. vertial. vertial.nes. sortint</li> </ul>
•-	Statu-0. CDC		resi's Astarn(d).t(d).B.e(s)
	do 55 j=1.s		rei's tast7, taus, integ[d]
	bnoust (j)=0.0d0		real*8 (J.:1:(n).:2(n) do 199 Indal.d
	do 99 ladi=1.d	148	c(ind)=dble(ind)/dble(d)
77	continue	***	pss=t(2)-t(1)
	do 12 i=1_s Efilelos(ufil)/flos(ufil)*fil)		nstar=73.d0 cmli indemx(n.xvec.attirgx)
12	Continue		call indemn(n, yver, antirgy)
	do 77 1=1,o		word(1)=www.(antirgu(1))
77	<pre>sord(1)=s(antirys(1)) continue</pre>	101	continue
	do indel.d. Joshi indi-0.d0		call rank(n, antirge, rgs) call rank(n, antirge, rgs)
	logAl (ind)=0.dD		
	andan Inde I		11(1)*(.do/log(dble(n)/(dble(ryy(1))=0.5db))
700	if (x(ind).le.r(antirys(1))) then lonA0(ind)= low(1-w(ind))	102	continue do 105 ind-1.d-1
	de 17 iel.n		B=(1-tind))/tind)
-	log(1-s(mtirgs(1)))		0-8-12(1)
37	continue logAl(ind)=logAl(ind)/dble(n) = log(leg(ind))		if (x1(1),GT,G) then o(1)=x1(1)/m
_	nous1(ind) = mmp(p1(ind) * logA0(ind) +		alan asilantan
•	ind=ind+1		endif
	goto 700 endif	100	cill index(n.e.antirgt)
	E2=1. averations (at )		do JOJ 1=1,n Ford(1)em(enfirme(1))
600	if [xiind].le.aux) then	303	continue
	de 26 1+1,81		j=73.d0
	<pre>logAO(ind) = logAO(iAd) + log(1 - t(antiryt(i)))</pre>		da 104 1=438,900 SVR=Cord(1)*j+scm
26	continue local(ind)-local(ind)/dble(n)	304	j=j=1.d0
•	<pre>+ dble(k2)*log(x(ind))/dble(n)</pre>		Astam(ind)=t(ind)=t(i.d)
•	<pre>do 27 l=k2+1.n</pre>	162	cell LauK(t.pes.Astern, text7, texs, inter)
	<pre>logAl(ind)=logAl(ind)=log(z(antirgz(i)))</pre>		
27	continue losi (intisianti (inti) (iti sta)	8008	-PROGRAMME CALCULANT L'ENTIMATEUR DE JOR ET AL. AVEC UM MEDIL DE 25/1001
•	<pre>+dble(k2)*log(x(ind))/dble(n)</pre>		
•	<pre>+(1-dble(k1)/dble(n))*log(1-x(ind))</pre>		Norostine joel25(svec.yee,taut7) Lociude 'communi001'
	noutl(ind) emp(pl(ind) = logA0(ind)		<pre>integer run(n), ruy(n), antirun(n), antirun(n), ind.metar.i.i</pre>
-	ind=ind-1		real*S xvec(n).yvec(n). mrd(n), yord(n).pas, tard(n)
	goto 401 endit		real*6 was
	k]=k2+1 gate \$60		real*6 reut7.teus.integ(d) real*6 Q.xl(n).xl(n)
	endif		do 199 indel,d t(ind)=dble(ind)(dble(d)
900	do 28 i=1.n	199	continue
	<pre>logA0(ind)=logA0(ind)+log(1=s(antirgs(i)))= log(s(antirgs(i)))</pre>		paget(2)=t(1) nstar=40.d0
28	continue		call indexx(n, swee, antirgs) call indexx(n, wee, antirgs)
	logAl(ind)=log(x(ind))		de 101 1=1.a
	nows:(ind)=exp(pl(ind)*logA0(ind)+(i=pl(ind))*logA1(ind)) ind=ind+l		yord(1)-yver(antiry(1))
	acto 900 endit	101	call rank(n.antirgx,rgx)
	call tauKix, pas, nous1, taut, taus, integ)		call rank(n, antirgy, rgy) do 102 (=1.a
	<del></del>		x1(1)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgs(1))=0.5d0))
PROGRAMME PRINCIPAL CALCULANT LES ENTIMATEURS DE JOE ET AL. ET DE KNOUDMANI SUR LES ECHANTILLONS DE DOMMENTS 1,2.3 ET 4 DE L'ALCAM		302	continue continue
			co JOS indel.d-I Be(I-t(ind))/t(ind)
	integer n.m.i.j		do 306 i=1.a G=8=2(1)
	psrameter (nn=1731,n=42) resl*8 ul(nn),vl(nn),u2(nn),v2(nn),ul(nn),vl(nn),u((nn),v((nn))		if (m1(1).07.0) then
	real*8 taut, dates(nn), dates(nn)		a(1)=11(1)/n else
	open(1,file+'AMCC11.LS7')		a(1)-Q/n endif
	de 10 tal.en	306	encido
10	read(1,*) datma(1),ul(1) continue		do 303 i=1,n
10	read(1.*) datmu(1),ul(1) continue do 20 i=i.mn		call indexs(n.e.antirgt) do 301 il.n tord(i)=e(entirgt(i))

103	continue sur-0.d0		do 101 i=1.m word(i)=mwag(antirgs(i))
	j=40.d0 do 304 1=922.381	101	yörd(i)-yvus(entirgy(i)) continue
	eum=tori(())*j+eem. j*j-1.d0		call rank(n,antirgr.rgr) call rank(n,antirgy,rgy)
304	anddo Astarn (1ad) et (1ad) * man/60. do		do 1=1,n rvmr(1)=0.dd
305	Otint", Lnd. Astarn(ind) unddo		enden do 102 i=1.5
	cull tauf(t.phs.Astarn.taut7.taus.integ) and		<pre>sstar(1)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgs(1))=0.5d6)) ystar(1)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgy(1))=0.5d6))</pre>
1004-	PROGRAMME CALCULART L'ESTIMATED OF ENOURALL AVE: IN SECUL OF 23/910		rver(1)=mutar(1)=yutar(1) 12 (rver(1).gr.rstar21) then
******	subrouting the125 (aver. yver. test))		mətarəmətarə i İstar (mətar) = i
	include commandio.	102	entit
•	Listafia; h. ind. mstar, i		do 103 kwi.netar wherik)anstar(istar(k))/rwstiatar(k))
٠	Hitarini, ystarini, rvacini, www.cni.rstar21	103	continue An 104 induit.d-1
			Aneure . do
	tes) TR tests, tests, inten/d)		<pre>auxillevere(k) *(t(ind)) auxillevere(k) *(t(ind)) auxillevere(k) *(t(ind))</pre>
	do 199 indel.d		if (aurill.go.auril2) then
199			
	rstarljal5.d0	105	endi 2 Continue
	call indext(n, wer, antirus)	104	Astarn(ind)=2.00*Anaux/dble(nstar)
	de 101 i=1,n		call tauKit, pas, Astarn, taut3, taus, integ)
	yord(1) symclasticuy(1))		
101	call rank(n.antirgn.egs)		
	do 1=1.a		include 'communical'
		•	ister(n), k. ind. nstar, i
	<pre>ustar(i)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgr(i))=0.5d0))</pre>	•	sstarin). ystarin). voc(n). vvec(n).rstaril
	yetaril)=L.do/iog(dois(n)/(dois(Tyy(L))=0.5d0)) reacti)=Estar(1)=yetar(1)		THEI' A ANALX, BUXIII, AUXILI, ASTAIN(G), C(d)
	if (rvecil).gt.rstar31) than Astar+Astar+1		
	istar(natar)=i endif		real*5 taut3.taus.integ(d) do 199 ind=1.4
102	continue do 103 k=1.nster	199	t(ind)=dble(ind)/dble(d) continue
10)	www.ckt=xstar(istar(k))/rvec(istar(k)) continue		pas=t(2)-t(1) rstar21=50.d0
	do 104 indel,d-1 Anaux=0.d0		nstar=0.dQ call indext(n.xvec.antirgx)
	<pre>do 105 k=1.mstar auxill=wwac(k)*(t(ind))</pre>		call indexx(n.yvec.antirgy) do 101 i=1,n
	<pre>suntll=(1.d0-www.ck))*(1.d0-tlind1) if (suntll.ge.suntll) then</pre>		xordii)=xveciantirgx(i)) yord(i)=yveciantirgy(i))
	AneureAneureeurill	101	continue call rank(m.antirgm.rgm)
	AnaursAnaursanxil2		call rank(n.antirgy.rgy) do i=1,n
105	continue Asterniindia dotanaur/dbieinstati		Evectile0.d0
194	continue coll rankit can Astavn (aut) faus intagi		<pre>do 102 i=1.n     xstar(i)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgx(i))=0.5d0))</pre>
	eod		ystar(i)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgy(i))=0.5d0)) rvsc(i)=mstar(i)+ystar(i)
1005-	PROGRAMME CALCULANT L'ESTINATEUR DE ENOUDRAIT AVEC UN SEUIL DE 25/1001		if (rvec(i).gt.rstar21) then nstar=nstar=1
	subrouting tho235(swec.ywec.taut3)		istar(nstar)=1 endif
_	integer rgs(n), rgs(n), antirgs(n), antirgy(n).	102	continue do 101 kel.natar
•	real*6 xvecin).yvecin). xord(n). yordin).pes.	103	<pre>wwwc(k)=xstar(istar(k))/rvec(istar(k)) continue</pre>
•	real*8 Anask, sumili, sumil2, Astarn(d), t(d)	••••	do 104 ind=1.d-1
			do 105 kml.nstar
	real*S taut3.taus, integid1		<pre>sumil2=(1.d0-wvec(k))*(1.d0-t(ind)) id (number)</pre>
	do ISF indel.d t(ind)=dble(ind)/dble(d)		AnguraAnguranguraurili
199	continue pas=t(2)-t(1)		Anauz-Anauz+auzi12
	rstarl1=25.40 Astar=0.d0	105	continue
	call indepath.wvec.antirget call indepath.yvec.antirgy)	104	AFTER(ING) = 2. GU ~ ANALOX / GDL = (AFTER) continue
	dm IDI 1+L,n .mord(1)=nvec(antirgs(1))		call Caukit.pas.Astern.Laut3.taus.integ) and
101	yardill=yvec(antirgy(1)) continue	90US	-PROGRAMME CALCULANT L'ESTIMATEUR DE KNOUDRAJT AVEC UN SEUTL DE 100/910
	call rank(n.antirgx.rgx) call runk(n.antirgy.rgy)		subroutine khol200(avec, yvec, taut3)
	do i=1.n rvec(1)=0.d0		include 'community' integer rypin), rypin), antirypin), antirypin),
	enddo do 103 Lel.a	•	istar(n), R, ind, Astar, i real*S xvec(n), yvec(n), xord(n), yord(n), pag.
	<pre>xstar(1)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgx(1))-0.5d9)) ystar(1)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgy(1))-0.5d0))</pre>	•	RELEFINI, YELAFINI, RVCC(n), RVCC(n), FELAT21 real*6 Anaux, auxil1, auxil2, Astarn(d), t(d)
	rvec(1)*xstar(1)*ystar(1) if (rvec(1).gt.rstar21) then		
	nstar=nstar=1 istar(nstar)=i		reel*8 taut3, taus, integ(d)
102	continue		do 199 Indel.d t(ind)=dble(ind)/dble(d)
	do 103 k=1,natar www.(k)=xatar(istar(k))/rwwc(istar(k))	133	continue pes-t(1)+t(1)
103	do 104 ind=1.d-1		retarzi=100.00 netar=0.d0
	Aneur-0.d0 do 105 k=1,nstar		call index(n, xvec, antirgx) call index(n, yvec, antirgy)
	sucil==vvcc(k)*(t(ind)) sucil==(1.d0==vvcc(k))*(1.d0=t(ind))		do 101 i=1,n xord(1)=xvec(antirgx(1))
	if (sumill.go.aumill) then knowstanum.eumill	101	yord(1)=yvec(antirgy(1)) continue
	alse Angur-Ansuk-euxill		call rank(n.antirgx.rgx) call rank(n.antirgy.rgy)
105	endif continue		do i=1.5 rvec(i)=0.d0
104	Astarn(ind)=2.d0*Aneux/dble(nstar) continue		enddo do 102 i=i,a
	call teuf(t.pes.Astern.faut].teus.integ) end		<pre>xstar(1)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgr(1))-0.5d0)) ystar(1)=1.d0/log(dble(n)/(dble(rgr(1))-0.5d0))</pre>
SULT-PROBABLY CALCULARY L'ESTIMATELE DE ENCERATE AVEC DE ENCIL. DE 10/810			rvec(1)=Hatar(1)=ystar(1) 1f (rvec(1).gt.rstar21) then
******	subroutine khoil60(xvec, vvec, taut])		nstar=nstar=1 (star(nstar)=1
	include 'commanflû' (ntever rat(h), ray(h), antirax(h), antiray(h).	102	endi:
•	Latar(n), k.ind.natot.i [mel=0 xws(n), yws(n), word(n), word(n).nas.	-	do 103 k=1,nstar www.(k)=sstar(istar(k))/rwwc(istar(k))
٠	Eltar(a), ystar(a), twe(b), www(a), rstar21 res1*4 Anaux, aux111, aux12, astara(d), c(d)	103	continue do 104 indel.del
			Ansum=0.d0 do 105 z=1.nstaf
	feel*\$ East].taus.inter(d)		sum(11=sum(k)*(t(ind)) sum(12=(1,d)=sum(k))*(1,d)=t(ind))
	do 199 ind=1.d t (ind) /dbls (ind) /dbls (d)		if (auxill.go.auxil2) then Anaux=Anaux=euxil1
199	continue Desc(2) = 13		else AngutaAngutegut12
	rstar21=50.40	105	endit continue
	esli indeprin, svec, antigut) esli indeprin, vvec, antigut)	104	Astern(ind)=2.d0*Ansum/dbls(nster) continue

```
call tout(t, pas, Astern, tout), tous, integ)
      call task(t,pas,Astarn,tast),task,isteg)
end
Sour-PeodAlmer C-ALCTLAFT L'ESTIMATION DE ENDURANT AVEC UN SEDIL DE 100/1001
subroutine khol200(nvec,yvéc,taut3)
include 'communi001'
intelude 'communi00'
intelude 'communi0'
intelude 'com
                                                                                           real*8 task!.task.integ(d)
do 199 isde:/_d)a(ind)/dble(d)
    continue
    continue
    fair-color (ind)/dble(d)
    retarl=:00.d0
    call index(in,vwc.entiryx)
    call index(in,vwc.entiryx)(i)
    rootine
    rowc(intiryx(i))
    continue
    rowc(intiryx(i))
    continue
    rowc(i)=vwc(intiryx(i))
    continue
    rowc(i)=0.d0
    ido
    ido

                  199
                     101
                                                                                           do Tree(i)=0.do
enddo
for 102 i=1.d
for
                                                                                     continue
do 103 k=1, catar
www.(h)=sutar(istar(h))/rvwc(istar(h))
do 100 indeh, d=1
Anause0.d0
do 105 k=1, netar
sutili=vvwc(h)*(t(ind))
auxili=vvwc(k)*(t(ind))
if (sutili.g=.sutili)
if (sutili.g=.sutili)
also
auxi=v=uxili2
                     102
                     103
                                                                                                                                                                    AgaureAsaureasureaurill
alse
AnaureAsaureasurill
andif
continue
Astarn(ind)=2.d0*Anaur/dble(nstar)
                     105
            IOA CORLINA CORLINA ASTAR, LOUTS, CAUS, INTER

CORLINA (L. DAS, ASTAR, LOUTS, CAUS, INTER)

and

FICHIER DE DECLARATIONS DE VARIABLES COMMUNES AUX DIFFERENTS FROGRAMES
                     104
         T
SOUS-PROGRAMES
      SUGB-FREGRAMMEND

integer n. d. nrepli

presific (1910.d=100, nreplis50)

resific (1910.d=100, nreplis50)

resific drand

common /vari/ r.

common /vari/ r.

common /vari/ r.

common /vari/ para

external drand

FICHIRE DE DECLARATIONE DE VARIABLES COMMENTS AUX DIFFENENTS PROGRAMMENT

ET
PICHIER DE DECLARATIONE DE VARIABLES COmmunes non
ET
BOUS-VROCHAMENES
DUS-VROCHAMENES
integer n. d. nrepli
parameter (na-1001.de100. nrepli=50)
real*6 dramad
common /vari/ r. alpha. c. ord
common /vari/ s. alpha. c. ord
common /vari/ said
common /vari/ said
common /vari/ said
externaldrand
PCDM LES PROCEDURES index. rask. CAUK. WOIR AMERICE E
```

~







TEST TARGET (QA-3)









C 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved