

SYSTÈMES DE DIFFUSION-RÉACTION AVEC
CONDITIONS DIRICHLET-PÉRIODIQUES

par

Hugues Bouchard

Thèse présentée au Département de mathématiques et d'informatique en vue de
l'obtention du doctorat en mathématiques.

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, août 1998

III - 1177



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-56991-8

Canada

SOMMAIRE

La présente thèse étudie l'existence et le calcul de solutions deux fois dérivables dans L^2 de systèmes de diffusion-réaction avec conditions Dirichlet-périodiques. La méthode utilisée pour résoudre le problème consiste à ajouter une nouvelle inconnue et un problème adjoint au problème original. La partie linéaire du système est alors auto-adjointe et la partie non-linéaire est un potentiel. Ensuite, on associe au problème augmenté une fonctionnelle φ , définie sur un espace de Sobolev adéquat, dont les points critiques seront les solutions du système de diffusion-réaction augmenté. Pour montrer l'existence et calculer les points critiques de la fonctionnelle φ , on utilise une base Hilbertienne bien choisie pour l'espace de Hilbert sur lequel la fonctionnelle φ est définie; on montre que la restriction de φ au sous-espace engendré par un sous ensemble fini de la base possède toujours au moins un point critique; on montre finalement que les points critiques des restrictions en dimension finie de φ possèdent des points d'accumulation (selon une certaine topologie) et que ces points d'accumulation sont des points critiques de la fonctionnelle non restreinte.

REMERCIEMENTS

Mes plus sincères remerciements vont à mes directeurs de recherche le professeur Gilles Fournier avec qui j'ai commencé cette recherche et le professeur Jean-Marc Belley qui a su si efficacement prendre le relais après le décès de Gilles.

Je remercie le professeur Tomasz Kaczynski et toute l'équipe d'analyse pour leur soutien financier. Je remercie aussi le professeur Jacques Dubois qui m'a introduit à l'analyse fonctionnelle avec un enthousiasme contagieux. Je remercie également le professeur Gaston Giroux qui a joué un rôle important dans mon développement comme mathématicien.

Je remercie finalement ma conjointe Francine qui m'a apporté le support moral dont j'avais besoin. Je remercie mes parents qui m'ont appuyé durant tout mon cycle universitaire.

LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS

Notations relatives à la donnée du système de diffusion réaction

N : Nombre de variables spatiales x_i par opposition à la variable temporelle t .

M : Nombre de substances qui diffusent et interagissent dans notre système.

Ω : Le domaine spatial de notre système de diffusion-réaction Dirichlet-périodique. On supposera que Ω est un ouvert borné dans l'espace euclidien \mathbb{R}^N . On supposera à certains endroits qu'en plus la frontière $\partial\Omega$ satisfait la condition Lipschitz locale forte.

Ω_T : Le domaine du système de diffusion-réaction . $\Omega_T = [0, T] \times \Omega$.

$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_M)$: Matrice diagonale contenant les constantes de diffusivité d_i des M substances. Les constantes d_i sont strictement positives.

$f : \Omega_T \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$: Fonction d'interaction entre les substances.

$u = (u_1, \dots, u_M)'$: $\Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^M$: Cette application donne la concentration des M substances en fonction du temps $t \in [0, T]$ et de la position $x \in \Omega$. C'est l'inconnue du système de diffusion-réaction.

∇v : Le gradient d'une fonction v .

$\nabla_x v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_N} \right)'$: Le gradient par rapport aux variables spatiales d'une fonction v définie sur Ω_T .

$\Delta_x v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$: Le laplacien d'une fonction v définie sur Ω_T .

Notations relatives aux espaces de fonctions.

R^k : L'espace euclidien de dimension k .

$R^{k \times m}$: L'espace des matrices réelles $k \times m$.

$C^m(\Omega), C^m(\Omega_T)$: Fonctions réelles continuellement différentiables jusqu'à l'ordre m .

$H^{m,p}(\Omega), H^{m,p}(\Omega_T)$: Fonctions mesurables réelles m fois différentiables dans L^p au sens des distributions.

$H^m(\Omega), H^m(\Omega_T)$: Fonctions mesurables réelles m fois différentiables dans L^2 au sens des distributions.

$W^{m,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega_T)$: Même chose que $H^{m,p}(\Omega), H^{m,p}(\Omega_T)$.

$W^m(\Omega), W^m(\Omega_T)$: Même chose que $H^m(\Omega), H^m(\Omega_T)$.

$D(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \text{Supp}(u) \text{ est compact}\}$

$D_T(\Omega_T) = \left\{ u \in C^\infty(\Omega_T) \mid \begin{array}{l} \text{Supp}(u(t, \cdot)) \text{ est compact } (\forall 0 \leq t \leq T), \\ \partial^\alpha u(0, \cdot) = \partial^\alpha u(T, \cdot), \forall \text{ multi - indice } \alpha. \end{array} \right\}$

$H_0^{m,p}(\Omega)$: Fermeture dans $H^{m,p}(\Omega)$ de $D(\Omega)$.

$H_{T,0}^{m,p}(\Omega_T)$: Fermeture dans $H^{m,p}(\Omega_T)$ de $D_T(\Omega_T)$.

$W_g^{m,p}(\Omega) = \{u \in H^{m,p}(\Omega) \mid \text{trace}(u, \partial\Omega) = g\}$.

$W_{T,g}^{m,p}(\Omega_T) = \left\{ u \in H^{m,p}(\Omega_T) \mid \begin{array}{l} \text{trace}(u, \{t=0\}) = \text{trace}(u, \{t=T\}) \\ \text{trace}(u(t, \cdot), \partial\Omega) = g (\forall t \in [0, T]) \end{array} \right\}$

Les espaces $C^m(\Omega, R^k), W^{m,p}(\Omega, R^k), H^{m,p}(\Omega, R^k) \dots$ sont définis de façon semblable aux espaces $C^m(\Omega), W^{m,p}(\Omega), H^{m,p}(\Omega) \dots$ sauf que les fonctions membres ont leurs images dans R^k .

De même, les fonctions membres des espaces $C^m(\Omega, R^{k \times l}), W^{m,p}(\Omega, R^{k \times l}), H^{m,p}(\Omega, R^{k \times l})$ ont leurs images dans l'espace des matrices réelles $k \times l$.

Normes, produits scalaires et dualité

Si X est un espace normé on dénotera par $\|\cdot\|_X$ la norme de cet espace.

Si H est un espace de Hilbert on dénotera par $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ son produit scalaire.

Si X est un espace vectoriel topologique et que X' est son dual, on dénotera par $(\cdot, \cdot)_{X, X'}$ le produit de dualité entre X et X' .

Au besoin ces notations seront abrégées si le contexte est clair. Ainsi si on sait que $u \in L^2(\Omega_T; R^M)$ on écrira $\|u\|_{L^2}$ au lieu de $\|u\|_{L^2(\Omega_T; R^M)}$

Notations relatives aux opérateurs de différentiation.

On considère une fonction $g : \Omega_T \times R^M \rightarrow R : (t; x, y) \mapsto g(t; x, y)$ dépendant d'un argument temporel $t \in [0, T]$, d'un argument spatial $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$ et d'un vecteur de concentrations $y = (y_1, \dots, y_M) \in R^M$. On définit les notations suivantes.

$\partial_0 g = \frac{\partial g}{\partial t}$: La dérivée de g par rapport à la variable t .

$\partial_i g = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ ($1 \leq i \leq N$) : La dérivée de g par rapport à la i -ème variable spatiale.

$\partial_{N+j} g = \frac{\partial g}{\partial y_j}$ ($1 \leq j \leq M$) : La dérivée de g par rapport à la j -ème variable de concentration.

$\partial^\alpha g = \partial_0^{\alpha(0)} \partial_1^{\alpha(1)} \dots \partial_{N+M}^{\alpha(M+N)} g$ si $\alpha = (\alpha(0), \dots, \alpha(M+N)) \in \mathbb{N}^{M+N}$ sous l'hypothèse que l'ordre d'exécution des dérivations ne change pas le résultat.

$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_N}, \frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_M} \right)$: Le gradient de g .

$\nabla_x g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_N} \right)$: Le gradient selon les variables spatiales de g .

$\nabla_y g = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_M} \right)$: Le gradient selon les variables de concentration de g.

$\Delta_x g = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$: Le laplacien de g.

$0 < \lambda(1) < \lambda(2) < \dots < \infty$: Liste en ordre croissant des valeurs propres de l'opérateur

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) : v \mapsto -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}.$$

On considère une fonction $h : \Omega_T \times R^M \rightarrow R^M : (t; x; y) \mapsto h(t; x; y)$ dépendant d'un argument temporel $t \in [0, T]$, d'un argument spatial $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$ et d'un vecteur de concentrations $y = (y_1, \dots, y_M) \in R^M$. On définit les notations suivantes.

$h_i (1 \leq i \leq M)$: La i-ème composante de $h = (h_1, \dots, h_M)$.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial h_M}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial h}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial h_M}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial h}{\partial y_j} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial y_j}, \dots, \frac{\partial h_M}{\partial y_j} \right),$$

$\partial_i h = (\partial_i h_1, \dots, \partial_i h_M), 0 \leq i \leq N + M$.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_M}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_M}{\partial x_N} \end{bmatrix} : \text{La matrice jacobienne de h par rapport aux variables spatiales.}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial y_M} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_M}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_M}{\partial y_M} \end{bmatrix} : \text{La matrice jacobienne de h par rapport aux var. de concentration.}$$

$$\frac{\partial h}{\partial (t; x; y)} = \begin{bmatrix} \partial_0 h_1 & \dots & \partial_{N+M} h_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_0 h_M & \dots & \partial_{N+M} h_M \end{bmatrix} : \text{La matrice jacobienne de h.}$$

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	ii
REMERCIEMENTS	iii
LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS	iv
TABLE DES MATIÈRES	1
CHAPITRE 0 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 OPÉRATEURS DE SUBSTITUTION	5
1.1 Continuité de l'opérateur de substitution de L^p vers L^q	6
1.2 Théorème des accroissements finis et mesurabilité	15
CHAPITRE 2 DIFFÉRENTES FORMULATIONS DU PROBLÈME	21
2.1 Définition de la fonctionnelle	21
2.2 Régularité de Ω , théorie des traces et caractérisation de $W_{T_0}^{1,p}$	38
2.3 Condition Dirichlet-périodique et opérateur de substitution.	57
2.4 Différentes versions du problème	80
CHAPITRE 3 UN RÉSULTAT D'EXISTENCE	92
3.1 Existence d'une solution L^2 pour (P1)	92
CONCLUSION	108
BIBLIOGRAPHIE	109

INTRODUCTION

Les systèmes de diffusion-réaction possèdent de nombreuses applications en chimie, en biologie et dans les problèmes de transfert de la chaleur. (Voir, par exemple [3,6,7,13,16,17,18,19].) En biologie, une application importante est la description d'écosystèmes [6,7,19], les individus d'une même espèce étant alors considérés comme les molécules d'une substance. C'est surtout de l'étude des écosystèmes que vient l'intérêt porté aux solutions périodiques des équations de diffusion-réaction.

Les résultats connus d'existence de solutions pour ces systèmes utilisent l'un ou l'autre des théorèmes de point fixe classique. Ainsi le théorème de Banach sur les contractions se retrouve dans les travaux de Liu et Pao [12] et celui de Leray-Schauder est utilisé par Nkashama et Willem [15]. D'autres méthodes sont utilisées pour aborder ce problème. Par exemple, Dikansky utilise la méthode de Galerkin dans [4,5]. Son résultat important dans les deux cas (autonome et non-autonome) est l'existence d'une solution périodique asymptotiquement stable pour le problème de diffusion-réaction Dirichlet-périodique si une approximation Galerkin d'ordre suffisamment élevé possède une telle solution.

Dans cette thèse, nous combinons plusieurs méthodes pour étudier le problème : espaces de Sobolev, méthodes variationnelles, méthode de Galerkin, théorème du point fixe de Brouwer. Les contraintes imposées sur la croissance de la fonction d'interaction ainsi que sur la régularité du domaine spatial sont plus faibles que celles rencontrées dans la littérature.

Si on normalise la condition de Dirichlet à zéro, notre problème s'énonce comme suit :

$$(P1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta_x u = f(u) & \text{sur } \Omega_T \stackrel{\text{def}}{=} [0, T] \times \Omega, \\ u(0, x) = u(T, x) & x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \end{cases}$$

où

- $u = (u_1, \dots, u_M)' : [0, T] \times \Omega \rightarrow R^M$ est le vecteur-colonne des concentrations des M substances en présence.
- $f : [0, T] \times \bar{\Omega} \times R^M \rightarrow R^M$ est la fonction d'interaction des M substances en présence.
- $\mathcal{F}u(t, x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(t, x, u(t, x))$ est l'application (à la fonction de concentration u) de l'opérateur de substitution associé à f .
- $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_M)$ est la matrice de diffusivité des M substances. Les d_i ($i = 1, \dots, M$) sont des constantes positives.
- $\Delta_x u = (\Delta_x u_1, \dots, \Delta_x u_M)'$ est le laplacien appliqué à toutes les composantes de u .
- $\Omega \subset R^N$ est un ouvert borné. Dans l'énoncé de certains résultats on supposera que sa frontière satisfait une condition lipschitzienne locale forte. Pour d'autres résultats, on ne fera aucune hypothèse de régularité.

Le problème (P1) ne se prête pas directement à une formulation variationnelle. Faisons l'hypothèse que la fonction d'interaction $f(t, x, y)$ est continuellement dérivable par rapport à sa variable de concentration $y \in R^M$. On augmente ensuite le système d'une inconnue supplémentaire $v : \Omega_T \rightarrow R^M$ devant satisfaire le problème suivant :

$$(P2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial t} v - D \Delta_x v = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \diamond u \right)' v & (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \\ v(0, x) = v(T, x) & x \in \Omega, \\ v(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \end{array} \right.$$

L'augmentation de (P1) n'a pas ajouté ou soustrait de solutions au problème original. En effet, on voit facilement que si (u, v) est une solution du système augmenté (P1)+(P2) alors u est solution de (P1). Réciproquement, si u est une solution de (P1) alors $(u, 0)$ solutionne (P1)+(P2).

Notre étude du problème (P1) se fera en plusieurs étapes au long des différents chapitres de cette thèse. Au chapitre 1, le thème central sera l'opérateur de substitution. En effet, deux termes dans le problème (P1)+(P2) résultent de l'application d'un opérateur de substitution : les termes $f \circ u$ et $\frac{\partial f}{\partial y} \circ u$. Le chapitre 1 est divisé en deux sections. La section 1.1 présente les résultats de Krasnosel'skii relatifs à la continuité de l'opérateur de substitution d'un espace L^p vers un espace L^q (voir [8] pp. 20 à 32). La section 1.2 présente une généralisation non-triviale du théorème des accroissements finis faisant intervenir l'opérateur de substitution et la notion de mesurabilité.

Le but du chapitre 2 est d'établir une correspondance entre les points critiques d'une fonctionnelle φ et les solutions du problème (P1)+(P2). À la section 2.1, on définit tout d'abord la fonctionnelle φ et son domaine : l'espace de Sobolev $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; \mathbb{R}^M) \times H_{T_0}^{1,q}(\Omega_T; \mathbb{R}^M)$ (pour $p, q \in [1, \infty]$). On énonce ensuite des conditions suffisantes pour que φ soit de classe C^1 pour différents cas d'espaces $H_{T_0}^{1,p} \times H_{T_0}^{1,q}$. Les cas traités sont $(p = q = 2)$, $(p \in [1, N+1[, q = \infty)$, $(p = N+1, q = \infty)$ et $(p \in]N+1, \infty[, q = \infty)$. À la section 2.2, nous comparons deux façons de définir la condition Dirichlet-périodique homogène pour les espaces de Sobolev. L'une utilise la théorie des traces et requière une régularité suffisante de Ω : condition lipschitzienne locale forte (voir Adams [1] et Kufner et al. [9]). L'autre, obtenue par fermeture d'une famille de fonctions de classe C^∞ , ne suppose aucune régularité de Ω . On montre la coïncidence des deux définitions quand Ω satisfait une condition lipschitzienne locale forte. Les démonstrations sont inspirées de celles utilisées dans Adams [1] pour les résultats d'égalité entre H_0^1 et W_0^1 . À la section 2.3, on s'intéresse de nouveau à l'opérateur de substitution et à son effet sur la condition Dirichlet-périodique imposée à u . On obtient des conditions suffisantes sur f pour que $f \circ u$ soit Dirichlet-périodique quand u est Dirichlet périodique. On n'impose aucune condition de régularité à Ω . À la section 2.4, on établit des correspondances entre diverses variantes d'un même problème. La première série de correspondances porte sur différentes versions du problème (P1)+(P2). La deuxième série porte sur différentes versions de (P1). Les résultats de cette section peuvent se résumer ainsi :

- en posant certaines conditions sur Ω et sur f (voir théorème 2.4.2), on a que les $(u, v) \in H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M})$ qui sont solutions faibles de (P1)+(P2) sont les points critiques de φ définie sur $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M})$,
- en posant certaines conditions sur Ω et sur f , ces conditions dépendant de la valeur de $p \in [1, \infty[$ (voir théorèmes 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5 et 2.4.6), on a que les $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ qui sont solutions faibles de (P1) correspondent aux points critiques de la forme $(u, 0)$ pour φ définie sur $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T_0}^{1,\infty}(\Omega_T; R^M)$.

Au chapitre 3, nous présentons un résultat d'existence (voir théorème 3.1.1) d'une solution u , deux fois différentiable dans L^2 (au sens des distributions) et satisfaisant les équations de (P1) au sens L^2 . La méthode utilisée procède en plusieurs étapes. Premièrement, on introduit une suite emboîtée de sous-espaces $\{X_k\}$ de dimension finie dont l'union est dense dans $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$ et $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$. On utilise ensuite le théorème de point fixe de Brouwer pour prouver que $\varphi|_{X_k \cdot X_k}$ possède un point critique de la forme $(u^k, 0)$ pour chaque entier positif k . On montre ensuite que toute suite $\{u^k \in X_k\}$ correspondant à des points critiques $(u^k, 0)$ de $\varphi|_{X_k \cdot X_k}$ est bornée dans $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$ et $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$. On montre finalement que les points d'accumulation $H_{T_0}^2$ - faibles d'une telle suite $\{u^k\}$ (ils existent par la réflexivité de $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$) sont points critiques de φ et sont solutions des équations de (P1) au sens L^2 .

Dans ce type de résultats, il n'est pas souhaitable de limiter le taux de croissance de la fonction d'interaction par rapport aux variables de concentration. Notre résultat est meilleur que ceux retrouvés dans la littérature sur ce point. Par exemple, dans les résultats de Dikanski [4,5] on demande que la fonction d'interaction s'annule quand le vecteur des concentrations des substances dépasse un certain seuil. De leur côté, Morgan et Hollis [14] majorent par une constante une combinaison linéaire des taux de réaction des différentes substances. Dans cette thèse, nous permettons à la fonction d'interaction de croître linéairement avec les concentrations des substances. D'autre part, la régularité que nous demandons au domaine spatial Ω est plus faible que celle exigée dans la littérature (C^{0+1} au lieu de $C^{2+\alpha}$).

OPÉRATEURS DE SUBSTITUTION

Les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t}u - D\Delta_x u = f \circ u \quad (t, x) \in \Omega_T \stackrel{\text{déf}}{=} [0, T] \times \Omega \quad (1)$$

et

$$-\frac{\partial}{\partial t}v - D\Delta_x v = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ u \right)' v \quad (t, x) \in \Omega_T \quad (2)$$

extraites du problème (P1)+(P2) contiennent toutes les deux une composante non-linéaire obtenues en appliquant des opérateurs de substitution (aussi appelé opérateur de

Nemytskii) : les termes $f \circ u(t, x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(t, x, u(t, x))$ pour (1) et $\frac{\partial f}{\partial y} \circ u(t, x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, u(t, x))$

pour (2). Dans ce chapitre nous résoudrons deux difficultés techniques rencontrées en manipulant ces termes dans notre travail sur les systèmes de diffusion-réaction.

À la section 1.1, nous présentons des résultats de Krasnosel'skii (voir [8] pp 20 à 32) relatifs à la continuité de l'opérateur de substitution d'un espace L^p vers un espace L^q . Plus précisément, nous étudions le problème suivant : soit (E, \mathfrak{F}, m) un espace mesuré non atomique; soient $(X, \beta(X))$, $(Y, \beta(Y))$ des espaces de Banach munis de leurs tribus de Borel; soient finalement des fonctions mesurables $g : (X, \beta(X)) \rightarrow (Y, \beta(Y))$ et $h : (E, \mathfrak{F}) \times (X, \beta(X)) \rightarrow (Y, \beta(Y))$. On cherche des conditions nécessaires et suffisantes sur g pour que l'application $u \mapsto g \circ u$ envoie $L^p(E; X)$ dans $L^q(E; Y)$ et pour que cette transformation soit continue. De même, on cherchera des conditions nécessaire et/ou suffisantes pour que l'application $u \mapsto (e \mapsto h(e, u(e)))$ soit continue de $L^p(E; X)$ vers $L^q(E; Y)$. Les résultats obtenus dans cette section serviront à nous assurer que le terme

$f(t, x, u)$ de (1) et le terme $\frac{\partial f}{\partial y}(t, x, u)$ de (2) appartiennent à des espaces L^q appropriés et que ces fonctions varient continuellement par rapport à $u \in L^p(\Omega_T; R^M)$.

À la section 1.2, nous présentons des adaptations non-triviales du théorème des accroissements finis s'appliquant dans un contexte d'utilisation de l'opérateur de substitution. Considérons les fonctions g et h définies au paragraphe précédent mais supposons cette fois-ci que g va de $E \times R^K$ vers R et que h va de R^K vers R . On va dénoter par $\nabla_y h(e, y)$ le gradient de h par rapport à l'argument $y \in R^K$. On aimerait pouvoir écrire les choses suivantes :

$\forall u, v : (E, \mathfrak{F}) \rightarrow (R^K, \beta(R^K))$ mesurables, $\exists \theta_g, \theta_h : (E, \mathfrak{F}) \rightarrow ([0,1], \beta[0,1])$ également mesurables telles que :

$$g(v(e)) - g(u(e)) = \langle \nabla g([1 - \theta_g]u(e) + \theta_g v(e)), v(e) - u(e) \rangle_{R^K} \quad (3)$$

et

$$h(e, v(e)) - h(e, u(e)) = \langle \nabla_y h(e, [1 - \theta_h]u(e) + \theta_h v(e)), v(e) - u(e) \rangle_{R^K}. \quad (4)$$

La difficulté dans les deux problèmes présentés ci-dessus est bien entendu d'obtenir la mesurabilité des fonctions "d'accroissement fini" θ_g et θ_h . Les résultats obtenus serviront pour démontrer les résultats sur la différentiabilité de la fonctionnelle φ à la section 2.1.

1.1 Continuité de l'opérateur de substitution de L^p vers L^q

Définition 1.1.1

1) Soit (E, \mathfrak{F}, m) un espace mesuré avec mesure positive. Soit $(X, \beta(X))$ un espace de Banach muni de sa tribu de Borel. Soit $u : (E, \mathfrak{F}, m) \rightarrow (X, \beta(X))$ une fonction mesurable et $p \in]0, \infty[$. Nous disons que $u \in L^p(E; X)$ si $\int_E \|u(e)\|_X^p dm(e) < \infty$. Si on considère comme identiques deux fonctions égales presque partout alors $L^p(E; X)$ est un espace de

Banach pour $p \in [1, \infty[$ avec la norme $\|u\|_p \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \left\{ \int_E \|u(e)\|_X^p dm(e) \right\}^{1/p}$ et un espace m\'etric

complet pour $p \in]0, 1[$ avec la distance $d_p(u, v) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \int_E \|u(e) - v(e)\|_X^p dm(e)$.

2) Soit $(Y, \beta(Y))$ un autre espace de Banach et soient $p, q \in]0, \infty[$. On dit qu'une fonction mesurable $g : (X, \beta(X)) \rightarrow (Y, \beta(Y))$ est (p, q) -pr\'eservante si

- $u \in L^p(E; X) \Rightarrow g \circ u \in L^q(E; Y)$
- L'application $u \mapsto g \circ u$ est continue de $L^p(E; X)$ vers $L^q(E; Y)$.

3) Soit une fonction mesurable $h : (E, \mathfrak{F}) \times (X, \beta(X)) \rightarrow (Y, \beta(Y))$, on dit que h est

(p, q) -pr\'eservante si la composition $h \diamond u(e) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} h(e, u(e))$ satisfait les conditions suivantes :

- $u \in L^p(E; X) \Rightarrow h \diamond u \in L^q(E; Y)$
- L'application $u \mapsto h \diamond u$ est continue de $L^p(E; X)$ vers $L^q(E; Y)$.

4) L'application $u \mapsto h \diamond u$ s'appelle op\'erateur de substitution associ\'e \`a la fonction h . On va donner \`a l'op\'eration \diamond le nom de composition tordue.

D\'efinition 1.1.2

Un espace mesur\'e (E, \mathfrak{F}, m) totalement σ -fini avec mesure positive est dit non-atomique si pour toute suite positive $\{\pi(n)\}$ telle que $\sum \pi(n) = m(E)$ il existe un partition mesurable $\{E(n)\}$ telle que $m(E(n)) = \pi(n)$.

Remarques 1.1.3

- Les sous espaces non-n\'egligeables Borel-mesurables et Lebesgue-mesurables de R^K sont tous non-atomiques. Le domaine Ω_T de notre syst\eme de diffusion-r\'eaction est non-atomique.
- Un sous espace mesurable non-n\'egligeable d'un espace non-atomique est non-atomique.

- La définition habituelle caractérise les espaces non-atomiques par la propriété suivante : si E_1 est un sous espace mesurable de E alors il existe un sous ensemble mesurable $E_2 \subset E_1$ tel que $0 < m(E_2) < m(E_1)$. Pour plus de détails sur ces espaces voir [Halmos].

Théorème 1.1.4

- A) Soient $p, q \in]0, \infty[$, soit (E, \mathfrak{F}, m) un espace mesuré non-atomique tel que $0 < m(E) < \infty$ et soit $g : (X, \beta(X)) \rightarrow (Y, \beta(Y))$ une fonction mesurable. Alors g est (p, q) préservante si et seulement si

$$\exists a, b \geq 0 \text{ tels que } \|g(x)\|_Y^q \leq a \|x\|_X^p + b \quad \forall x \in X, \quad (5)$$

$$g \text{ est continue.} \quad (6)$$

- B) Si on suppose plutôt que $m(E) = \infty$ sans changer les autres hypothèses alors g sera (p, q) -préservante si et seulement si

$$\exists a \geq 0 \text{ tel que } \|g(x)\|_Y^q \leq a \|x\|_X^p \quad \forall x \in X, \quad (7)$$

$$g \text{ est continue.} \quad (8)$$

Démonstration :

Étape 1 : Suffisance des conditions pour que $u \in L^p \Rightarrow g \circ u \in L^q$.

La suffisance de (5) et (6) pour l'énoncé A) et celle de (7) et (8) pour l'énoncé B) sont vérifiées dans les calculs ci-après :

$$\int_E \|g(u(e))\|_Y^q dm(e) \leq \begin{cases} a \int_E \|u(e)\|_X^p dm(e) + b m(E) < \infty & \text{si } m(E) < \infty, \\ a \int_E \|u(e)\|_X^p dm(e) < \infty & \text{si } m(E) = \infty. \end{cases}$$

Étape 2 : Suffisance des conditions pour avoir la continuité de L^p vers L^q .

Soit une suite $\{u^n\} \subset L^p(E; X)$ qui converge en norme L^p vers un certain u . Par le lemme 1.1.6 (à venir), on peut extraire une sous-suite $\{u^{n(k)} - u\|_X\} \subset \{u^n - u\|_X\} \subset L^p(E; R^+)$ et

trouver des fonctions $F, G \in L^p(E; \mathbb{R}^+)$ telles que :

$$\begin{aligned} \|u^{n(k)}(e) - u(e)\|_X &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 && \text{pour } e \text{ p.p. dans } E, \\ \|u^{n(k)}(e) - u(e)\|_X &\leq F(e) && \text{pour } e \text{ p.p. dans } E, \forall k \in \{1, 2, 3, \dots\}, \\ \|u^{n(k)}(e)\|_X, \|u(e)\|_X &\leq G(e) && \text{pour } e \text{ p.p. dans } E, \forall k \in \{1, 2, 3, \dots\}. \end{aligned}$$

On obtient alors une fonction dominante pour $\left\{ \|g \circ u^{n(k)} - g \circ u\|_Y^q \right\}$ dans $L^1(E; \mathbb{R}^+)$:

$$\|g(u^{n(k)}(e)) - g(u(e))\|_Y^q \leq \begin{cases} 2a[G(e)]^p + 2b & \text{si } m(E) < \infty, \\ 2a[G(e)]^p & \text{si } m(E) = \infty. \end{cases}$$

La continuité de g entraîne ensuite la convergence presque partout de $g \circ u^{n(k)}$ vers $g \circ u$. Par le théorème de convergence dominée on trouve ensuite que $g \circ u^{n(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g \circ u$ dans $L^q(E; Y)$ (au sens de la norme ou de la métrique L^q). Par le raisonnement précédent, on peut extraire de chaque sous-suite $\{g \circ u^{m(k)}\}$ une sous-sous-suite $g \circ u^{m(k(r))} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} g \circ u$ dans $L^q(E; Y)$. Par le principe de convergence la suite originale $\{g \circ u^n\}$ converge vers $g \circ u$ dans $L^q(E; Y)$.

Étape 3 : Une condition nécessaire technique quand $m(E) = \infty$.

Supposons que g est (p, q) -préservante, que (E, \mathfrak{F}, m) est un espace mesuré non-atomique et que $m(E) = \infty$. Montrons qu'alors $g(0) = 0$ (cette condition sera redondante une fois que (7) sera prouvée). Nous définissons $u(e) = 0$ dans $X \quad \forall e \in E$. Alors $g \circ u(e) = g(0)$ dans $Y \quad \forall e \in E$. Évidemment $u \in L^p(E; X)$ mais on a :

$$\int_E \|g(u(e))\|_Y^q dm(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(0) = 0, \\ \infty & \text{si } g(0) \neq 0. \end{cases}$$

Ainsi pour que g soit (p, q) -préservante il est nécessaire que $g(0) = 0$.

Étape 4 : Nécessité de la continuité de g .

Supposons que g est (p, q) -préservante.

Choisissons un sous ensemble mesurable \tilde{E} de E tel que $0 < m(\tilde{E}) < \infty$.

Choisissons $x \in X$ et une suite $\{x(n)\}$ convergente vers x dans X . Nous définissons les fonctions suivantes dans $L^p(E; X)$:

$$u_n = \chi_{\tilde{E}} x(n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$u = \chi_{\tilde{E}} x.$$

où χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A .

Comme g est (p, q) -préservante nous avons que

$$\int_E \|g(u_n(e)) - g(u(e))\|_Y^q dm(e) = m(\tilde{E}) \|g(x(n)) - g(x)\|_Y^q \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi $x(n) \rightarrow x$ dans $X \Rightarrow g(x(n)) \rightarrow g(x)$ dans Y et g est continue.

Étape 5 : Nécessité de la condition de croissance si $0 < m(E) < \infty$.

Supposons que $0 < m(E) < \infty$ et que (5) est fautive. Alors $\forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}, \exists x(n) \in X$ tel que :

$$\|g(x(n))\|_Y^q > n (\|x(n)\|_X^p + 1). \quad (9)$$

Comme E est non-atome il existe une partition mesurable $\{E(n)\}$ de E telle que

$$m(E(n)) = \frac{c}{n^2 (\|x(n)\|_X^p + 1)}$$

où

$$c = m(E) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\|x(n)\|_X^p + 1)} \right]^{-1}.$$

Nous définissons la fonction

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \chi_{E(n)}$$

qui appartient à $L^p(E; X)$ puisque

$$\int_E \|u(e)\|_X^p dm(e) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c \|x(n)\|_X^p}{n^2 (\|x(n)\|_X^p + 1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2} < \infty.$$

Toutefois $g \circ u$ n'appartient pas à $L^q(E; Y)$ car par (9) nous avons :

$$\int_E \|g(u(e))\|_Y^q dm(e) = \sum_{n=1}^{\infty} \|g(x(n))\|_Y^q m(E(n)) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n} = \infty.$$

Étape 6 : *Nécessité de la condition de croissance si $m(E) = \infty$.*

Nous prenons un sous ensemble mesurable \tilde{E} de E tel que $0 < m(\tilde{E}) < \infty$.

On définit une isométrie $\tilde{\cdot} : L^p(\tilde{E}; X) \rightarrow L^p(E; X)$ par la formule suivante :

$$\tilde{u}(e) = \begin{cases} u(e) & \text{si } e \in \tilde{E}, \\ 0 & \text{si } e \notin \tilde{E}. \end{cases} \quad (10)$$

Cette isométrie permet d'identifier $L^p(\tilde{E}; X)$ à un sous-espace de $L^p(E; X)$. Une isométrie définie de la même manière (notée également $\tilde{\cdot}$) permet d'identifier $L^q(\tilde{E}; Y)$ à un sous-espace de $L^q(E; Y)$. D'autre part, grâce à l'étape 3, on a $(g \circ u)\tilde{\cdot} = g \circ \tilde{u}$. Donc, pour que g soit (p, q) -préservante de $L^p(E; X)$ vers $L^q(E; Y)$, il est nécessaire qu'elle le soit de $L^p(\tilde{E}; X)$ vers $L^q(\tilde{E}; Y)$.

Alors il existe au moins un couple $(a, b) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$ tel que

$$\|g(x)\|_Y^q \leq a \|x\|_X^p + b \quad \forall x \in X. \quad (11)$$

On va prouver que parmi les couples (a, b) satisfaisant (11) il y en a au moins un de la forme $(a, 0)$. Supposons le contraire, alors pour tous les $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ il existe $x(n) \in X$ tel que :

$$\|g(x(n))\|_Y^q > n \|x(n)\|_X^p. \quad (12)$$

On définit maintenant une fonction $u \in L^p(E, X)$ telle que $g \circ u \notin L^q(E; Y)$. Comme E est non-atomique de mesure infinie il existe une suite $\{E(n)\}$ d'ensembles mesurables disjoints dans E tels que :

$$m(E(n)) = \frac{1}{n^2 \|x(n)\|_X^p}.$$

On remarque qu'aucun $x(n)$ ne peut être nul par l'hypothèse que g est (p, q) -préservante, l'étape 3 et l'inégalité (12) (qui garantit que $g(x(n)) \neq 0, \forall n$).

Soit la fonction $u = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \chi_{E(n)}$ alors

$$\int_E \|u(e)\|_X^p dm(e) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

mais

$$\int_E \|g(u(e))\|_Y^q dm(e) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Ainsi l'hypothèse que g est (p,q) -préservante est contredite et on a prouvé par l'absurde que l'inégalité (7) doit être vraie. \square

Théorème 1.1.5

Soient E, X, Y, p, q comme dans le théorème 1.1.4.

Supposons $h : (E, \mathfrak{A}) \times (X, \beta(X)) \rightarrow (Y, \beta(Y))$ est une fonction mesurable satisfaisant les conditions suivantes :

$$h(e, \cdot) \text{ est continue pour } e \text{ p.p. dans } E \text{ selon la mesure } m, \quad (13)$$

$$\exists \alpha \in [0, \infty[, \exists \beta \in L^1(E; R^+) \text{ tels que} \quad (14)$$

$$\|h(e, x)\|_Y^q \leq \alpha \|x\|_X^p + \beta(e) \quad (\forall x \in X, \text{ pour } e \text{ p.p. dans } E).$$

Alors h est (p, q) -préservante.

La démonstration de ce théorème utilise le lemme 1.1.6 ci-après. La preuve de ce résultat classique se trouve (entre autres) dans Brézis [2] au théorème IV.9.

Lemme 1.1.6

Soient (E, \mathfrak{A}, m) un espace mesuré avec mesure positive et $\{f_n\}$ est une suite convergente vers 0 dans $L^1(E; R)$. Alors il existe une sous-suite $\{f_{n(k)}\}$ et une fonction $F \in L^1(E; R)$ telles que

$$f_{n(k)}(e) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ pour } e \text{ p.p. dans } E, \quad (15)$$

$$|f_{n(k)}(e)| \leq F(e) \text{ pour } e \text{ p.p. dans } E. \quad (16)$$

Démonstration du théorème 1.1.5 :

Soit $u \in L^p(E; X)$. Supposons que h satisfait la condition de croissance (14). Les calculs suivants prouvent que $h \diamond u \in L^q(E; Y)$:

$$\int_E \|h(e, u(e))\|_Y^q dm(e) \leq \alpha \int_E \|u(e)\|_X^p dm(e) + \int_E \beta(e) dm(e) < \infty.$$

Supposons maintenant que h satisfait (13) et (14). Prenons une suite $\{u_n\}$ convergente vers u dans $L^p(E; X)$ et montrons que l'intégrale

$$\int_E \|h(e, u_n(e)) - h(e, u(e))\|_Y^q dm(e)$$

converge vers zéro quand $n \rightarrow \infty$.

Par le lemme 1.1.6, il existe une sous-suite $\{u_{n(k)}\}$ et une fonction dominante $F \in L^1(E; R)$ telles que :

$$\|u_{n(k)}(e) - u(e)\|_X^p \rightarrow 0 \text{ pour } e \text{ p.p. dans } E,$$

$$\|u_{n(k)}(e) - u(e)\|_X^p \leq F(e) \text{ pour } e \text{ p.p. dans } E.$$

Trouvons une fonction dominante \tilde{F} pour les $u_{n(k)}$ et pour u .

$$\begin{aligned} \|u_{n(k)}(e)\|_X^p &\leq \left[\|u_{n(k)}(e) - u(e)\|_X + \|u(e)\|_X \right]^p \\ &\leq \left[F^{1/p}(e) + \|u(e)\|_X \right]^p \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}(e) \end{aligned}$$

On va maintenant obtenir une fonction dominante pour la suite $\{h \diamond u_{n(k)}\}$ par les calculs suivants.

$$\begin{aligned} \|h \diamond u_{n(k)}(e) - h \diamond u(e)\|_Y^q &\leq \left[\|h \diamond u_{n(k)}(e)\|_Y + \|h \diamond u(e)\|_Y \right]^q \\ &\leq 2^q (\alpha \tilde{F}(e) + \beta(e)) \end{aligned}$$

D'autre part, par (13) nous savons que :

$$\|h \diamond u_{n(k)}(e) - h \diamond u(e)\|_Y^q \rightarrow 0 \text{ pour } e \text{ p.p. dans } E,$$

et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$h \diamond u_{n(k)} \rightarrow h \diamond u \text{ dans } L^q(E; Y).$$

Par le même raisonnement toute sous-suite $\{h \diamond u_{M(k)}\}$ contient une sous-sous-suite convergente vers $h \diamond u$ dans $L^q(E; Y)$ et donc la suite originale $\{h \diamond u_n\}$ converge vers $h \diamond u$ dans $L^q(E; Y)$. \square

Nous concluons cette section en donnant des énoncés alternatifs de la condition (14) du théorème 1.1.5.

Proposition 1.1.7

Soit (E, \mathfrak{F}, m) un espace mesuré avec mesure positive, soient X, Y des espaces de Banach, soient $p, q \in]0, \infty[$ et soit finalement une fonction mesurable $h : (E, \mathfrak{F}) \times (X, \beta(X)) \rightarrow (Y, \beta(Y))$.

Pour $r \in]0, \infty[$ on définit les affirmations suivantes.

$$A(r) : \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha_r \in [0, \infty[, \exists b_r \in L^r(E; R^+) \text{ tels que} \\ \|h(e, x)\|_Y^q \leq \alpha_r \left[\|x\|_X^{p/r} + b_r(e) \right]^r \end{array} \right.$$

Alors les énoncés suivants sont vrais.

- Si $A(r_0)$ est vraie pour un certain $r_0 \in]0, \infty[$ alors toutes les $A(r)$ sont vraies.
- Si $0 < r_0 < r < \infty$ et α_{r_0}, b_{r_0} vérifient les inégalités de $A(r_0)$ alors $\alpha_r = \alpha_{r_0}$ et $b_r = [b_{r_0}]_r^{r_0}$ vérifient les inéquations de $A(r)$.
- Prenons $\varepsilon > 0$. Si $0 < r < r_0 < \infty$ et α_{r_0}, b_{r_0} vérifient l'inéquation de $A(r_0)$ alors $\alpha_r = (1 + \varepsilon)\alpha_{r_0}$ vérifie $A(r)$ pour un choix convenable de $b_r \in L^r(E; R^+)$.

Démonstration :

Supposons que $A(r_0)$ est vraie, c'est à dire que

$$\|h(e, x)\|_Y^q \leq \alpha_{r_0} \left[\|x\|_X^{p/r_0} + b_{r_0}(e) \right]^{r_0} \quad (17)$$

pour certains $\alpha_{r_0} \geq 0$ et $b_{r_0} \in L^{r_0}(E; R^+)$.

Cas 1 :

Prenons $r \in]r_0, \infty[$. Posons $b_r(e) = [b_{r_0}(e)]^{r_0/r}$, $a_r = a_{r_0}$. Nous avons alors l'inégalité suivante :

$$\|x\|_X^{p/r_0} + b_{r_0}(e) = \left[\|x\|_X^{p/r} \right]^{r_0/r} + [b_r(e)]^{r_0/r} \leq \left[\|x\|_X^{p/r} + b_r(e) \right]^{r_0/r},$$

car $r/r_0 > 1$ et $\|x\|_X^{p/r}, b_r(e) \geq 0$. Ceci entraîne que les a_r, b_r définis ci-dessus satisfont l'inégalité de $A(r)$.

Cas 2 :

Cette fois, prenons plutôt $r \in]0, r_0[$. Nous choisissons $K > 0$ et nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left[\|x\|_X^{p/r_0} + b_{r_0}(e) \right]^{r_0/r} &\leq \begin{cases} \|x\|_X^{p/r} (1 + 1/K)^{r_0/r} & \text{si } b_{r_0}(e) \leq \frac{1}{K} \|x\|_X^{p/r_0} \\ b_{r_0}^{r_0/r}(e) (K + 1)^{r_0/r} & \text{si } b_{r_0}(e) > \frac{1}{K} \|x\|_X^{p/r_0} \end{cases} \\ &\leq \|x\|_X^{p/r} (1 + 1/K)^{r_0/r} + b_{r_0}^{r_0/r}(e) (K + 1)^{r_0/r}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \|h(e, x)\|_Y^q &\leq a_{r_0} \left[\|x\|_X^{p/r_0} + b_{r_0}(e) \right]^{r_0} \\ &= a_{r_0} \left(\left[\|x\|_X^{p/r_0} + b_{r_0}(e) \right]^{r_0/r} \right)^r \\ &\leq a_{r_0} \left[\left(1 + \frac{1}{K}\right)^{r_0/r} \|x\|_X^{p/r} + (K + 1)^{r_0/r} b_{r_0}^{r_0/r}(e) \right]^r. \end{aligned}$$

Ainsi $a_r = (1 + 1/K)^{r_0} a_{r_0}$ et $b_r(e) = \left(\frac{K + 1}{1 + K^{-1}} \right)^{r_0/r} b_{r_0}^{r_0/r}(e)$ vérifient l'inégalité de $A(r)$. Pour

chaque $\varepsilon > 0$, il existe un unique choix de $K > 0$ tel que

$$\left(1 + \frac{1}{K}\right)^r = 1 + \varepsilon,$$

on peut donc choisir a_r arbitrairement près de a_{r_0} . \square

1.2 Théorème des accroissements finis et mesurabilité.

L'utilisation du théorème des accroissements finis dans la résolution d'une équation fonctionnelle engendre souvent des problèmes de mesurabilité. Dans cette section nous

présentons des généralisations qui sont utilisables de façon générale dans un tel contexte et qui nous servira en particulier à démontrer que la fonctionnelle φ associée au problème (P1)+(P2) est de classe C^1 au prochain chapitre.

Soient

- (E, \mathfrak{F}) un espace mesurable,
- $g : R^K \rightarrow R$ une fonction partout dérivable,
- $h : (E, \mathfrak{F}) \times (R^K, \beta(R^K)) \rightarrow (R, \beta(R)) : (e, y) \mapsto g(e, y)$ une fonction mesurable telle que le gradient par rapport à la coordonnée y existe partout dans $E \times R$,
- $u, v : (E, \mathfrak{F}) \rightarrow (R, \beta(R))$ des fonctions mesurables.

Si on applique le théorème des accroissements finis classique on trouve l'existence de fonctions $\theta_g, \theta_h : E \rightarrow [0, 1]$ telles que :

$$g(v(e)) - g(u(e)) = \langle \nabla g([1 - \theta_g]u(e) + \theta_g v(e)), v(e) - u(e) \rangle, \quad (18)$$

$$h(e, v(e)) - h(e, u(e)) = \langle \nabla_y h(e, [1 - \theta_h]u(e) + \theta_h v(e)), v(e) - u(e) \rangle. \quad (19)$$

Toutefois le théorème des accroissements finis ne nous dit pas si parmi les θ_g, θ_h satisfaisant (18) et (19) il existe des fonctions mesurables. Dans cette section nous allons répondre à ces deux questions sous des hypothèses assez générales.

- Pour θ_g la réponse est oui avec (E, \mathfrak{F}) quelconque et g de classe C^1 .
- Pour θ_h la réponse est oui si (E, \mathfrak{F}) est un espace métrique séparable muni de sa tribu de Borel et si les fonctions $h, \nabla_y h$ sont continues sur $E \times R^K$.

Ces deux résultats seront des corollaires faciles du théorème suivant.

Théorème 1.2.1

Soient (E, d) un espace métrique séparable, $\beta(E)$ sa tribu de Borel et une fonction $h : E \times R^K \rightarrow R : (e, y) \mapsto h(e, y)$ telle que h et $\nabla_y h$ soient continues.

Alors il existe une fonction Borel-mesurable $\lambda : (E \times R^{2K}, \beta(E \times R^{2K})) \rightarrow ([0, 1], \beta[0, 1])$ telle que :

$$h(e, y_2) - h(e, y_1) = \langle \nabla_y h(e, y_1 + \lambda(e, y_1, y_2)(y_2 - y_1)), y_2 - y_1 \rangle \quad \forall (e, y_1, y_2) \in E \times R^K \times R^K \quad (20)$$

Démonstration :

Étape 1 : *Définition de la fonction d'accroissement fini λ .*

Soit une suite $\{\varepsilon_n\} \subset R$ telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Comme E et R^K sont des espaces métriques séparables, on peut trouver :

- une suite $\{P_n\}$ de partitions boréliennes de E ,
- une suite $\{Q_n\}$ de partitions boréliennes de R^K

telles que

- chaque partition P_n et chaque partition Q_n est au plus dénombrable,
- $A_n \in P_n \Rightarrow \text{diam}(A_n) < \varepsilon_n$, $I_n \in Q_n \Rightarrow \text{diam}(I_n) < \varepsilon_n$,
- $A_n \in P_n, A_{n+1} \in P_{n+1} \Rightarrow A_{n+1} \subseteq A_n$ ou $A_{n+1} \cap A_n = \emptyset$,
- $I_n \in Q_n, I_{n+1} \in Q_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} \subseteq I_n$ ou $I_{n+1} \cap I_n = \emptyset$.

Pour $(e, y_1, y_2) \in E \times R^K \times R^K$, on définit

$$\Lambda(e, y_1, y_2) = \left\{ t \in [0, 1] : h(e, y_2) - h(e, y_1) = \langle \nabla_y h(e, (1-t)y_1 + ty_2), y_2 - y_1 \rangle \right\}.$$

Cet ensemble est compact par la continuité de h et de $\nabla_y h$. Il est donc permis de poser

$$\lambda(e, y_1, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} \min \Lambda(e, y_1, y_2).$$

Étape 2 : *Approximation de la fonction d'accroissement fini en un point fixé.*

Soit $(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2)$ un élément fixé de $E \times R^K \times R^K$.

Soient $\hat{e} \in \hat{A}_n \in P_n$, $\hat{y}_1 \in \hat{I}_n \in Q_n$, $\hat{y}_2 \in \hat{J}_n \in Q_n$ (c. à d. que pour chaque coordonnée on sélectionne le membre de la partition P_n ou Q_n qui le contient).

On pose

$$\Lambda(\hat{A}_n, \hat{I}_n, \hat{J}_n) = \bigcup_{(e, y_1, y_2) \in E \cdot \hat{I}_n \wedge \hat{J}_n} \Lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2),$$

$$\lambda_n(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \inf \Lambda(\hat{A}_n, \hat{I}_n, \hat{J}_n).$$

Par construction la suite réelle $\{\lambda_n(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2)\}$ est non-décroissante et elle est bornée dans l'intervalle fermé $[0,1]$, on a donc l'existence de la limite

$$\hat{\lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2).$$

Nous allons montrer que $\lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \hat{\lambda}$. Premièrement, les calculs suivants montrent que $\hat{\lambda} \leq \lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2)$. (21)

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \subseteq \Lambda(\hat{A}_n, \hat{I}_n, \hat{J}_n) &\Rightarrow \inf \Lambda(\hat{A}_n, \hat{I}_n, \hat{J}_n) \leq \inf \Lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \\ &\Rightarrow \lambda_n(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \leq \lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \\ &\Rightarrow \hat{\lambda} \leq \lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \end{aligned}$$

Il reste à vérifier l'inégalité inverse.

$$\hat{\lambda} \geq \lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \quad (22)$$

Par définition

$$\lambda_n(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \inf \Lambda(\hat{A}_n, \hat{I}_n, \hat{J}_n), \quad (23)$$

prenons donc $\hat{\lambda}_n \in \Lambda(\hat{A}_n, \hat{I}_n, \hat{J}_n)$ situé à une distance d'au plus ε_n de l'infimum.

Alors $\exists \hat{e} \in \hat{A}_n, \exists \hat{y}_1^n \in \hat{I}_n, \exists \hat{y}_2^n \in \hat{J}_n$ tels que

$$h(\hat{e}_n, \hat{y}_2^n) - h(\hat{e}_n, \hat{y}_1^n) = \langle \nabla_y h(\hat{e}_n, (1 - \hat{\lambda}_n) \hat{y}_1^n + \hat{\lambda}_n \hat{y}_2^n), \hat{y}_2^n - \hat{y}_1^n \rangle. \quad (24)$$

On a alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \hat{\lambda},$$

car $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $0 \leq \hat{\lambda}_n - \lambda_n(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \leq \varepsilon_n$.

D'autre part, on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{e}_n, \hat{y}_1^n, \hat{y}_2^n) = (\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2)$$

car $(\hat{e} \in \bigcap A_n, \hat{y}_1 \in \bigcap \hat{I}_n, \hat{y}_2 \in \bigcap \hat{J}_n)$ et $\text{diam } \hat{A}_n, \text{diam } \hat{I}_n, \text{diam } \hat{J}_n \downarrow 0$.

Par la continuité des différentes expressions apparaissant dans (24) on obtient à la limite

$$h(\hat{e}, \hat{y}_2) - h(\hat{e}, \hat{y}_1) = \nabla_y h(\hat{e}, (1 - \hat{\lambda}) \hat{y}_1 + \hat{\lambda} \hat{y}_2). \quad (25)$$

Donc $\hat{\lambda} \in \Lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2)$, $\lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \min \Lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) \leq \hat{\lambda}$ et (22) est vérifiée.

Par (21),(22) et (25) nous avons donc que

$$\lambda(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \sup_{n \in \{1,2,3,\dots\}} \lambda_n(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2). \quad (26)$$

Étape 3 : Mesurabilité de la fonction d'accroissement fini.

Comme le point $(\hat{e}, \hat{y}_1, \hat{y}_2)$ choisi à l'étape 2 était arbitraire, on a montré que

$$\lambda(e, y_1, y_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(e, y_1, y_2) = \sup_{n \in \{1,2,3,\dots\}} \lambda_n(e, y_1, y_2) \forall (e, y_1, y_2) \in E \times R^k \times R^k.$$

On voit facilement que les fonctions mesurables λ_n peuvent s'écrire comme suit :

$$\lambda_n(e, y_1, y_2) = \sum_{\substack{A_n \in \mathcal{P}_n \\ I_n, J_n \in \mathcal{Q}_n}} [\inf \Lambda(A_n, I_n, J_n)] \chi_{A_n \cdot I_n \cdot J_n}(e, y_1, y_2). \quad (27)$$

λ est donc la limite ponctuelle d'une suite de fonctions Borel-mesurable, elle est donc également Borel-mesurable. \square

Un premier corollaire du théorème ci-dessus est l'existence d'une fonction mesurable θ_h résolvant (19).

Corollaire 1.2.2

Soient E et h comme au théorème 1.2.1.

Soient $u, v : (E, \beta(E)) \rightarrow (R^k; \beta(R^k))$ des fonctions Borel-mesurables.

Alors il existe une fonction Borel-mesurable $\theta_h : (E, \beta(E)) \rightarrow ([0,1], \beta[0,1])$ satisfaisant (19).

Démonstration :

On pose $\theta_h(e) = \lambda(e, u(e), v(e))$. \square

Un autre corollaire du théorème 1.2.1 est un théorème similaire où la composition tordue $h \diamond u$ est remplacée par la composition de fonctions ordinaire $g \circ u$.

Théorème 1.2.3

Soit $g \in C^1(R^K; R)$.

Alors il existe une fonction Borel-mesurable $\lambda_g : (R^K \times R^K, \beta(R^{2K})) \rightarrow ([0,1], \beta[0,1])$ telle que

$$g(y_2) - g(y_1) = \langle \nabla g([1 - \lambda_g(y_1, y_2)]y_1 + \lambda_g(y_1, y_2)y_2), y_2 - y_1 \rangle. \quad (28)$$

Démonstration :

Soit $\hat{E} = \{e_0\}$ l'espace métrique trivial avec un seul élément. On applique le théorème 1.2.1 à la fonction $h : \hat{E} \times R^K \rightarrow R : (e_0, y) \mapsto g(y)$ et on pose

$$\lambda_g(y_1, y_2) = \lambda(e_0, y_1, y_2). \quad \square$$

Avec ce dernier théorème, on peut trouver une fonction Borel-mesurable θ_g qui satisfait (18).

Corollaire 1.2.4

Soient (E, \mathfrak{F}) un espace mesurable quelconque et $g \in C^1(R^K; R)$.

Soient $u, v : (E, \mathfrak{F}) \rightarrow (R^K, \beta(R^K))$ des fonctions mesurables.

Alors $\exists \theta_g : (E, \mathfrak{F}) \rightarrow ([0,1], \beta[0,1])$ tel que

$$g(v(e)) - g(u(e)) = \langle \nabla g([1 - \theta_g]u(e) + \theta_g v(e)), v(e) - u(e) \rangle. \quad (18)$$

Démonstration :

Il suffit de poser $\theta_g(e) = \lambda_g(u(e), v(e))$. \square

CHAPITRE 2

DIFFÉRENTES FORMULATIONS DU PROBLÈME

Le but de ce chapitre est d'établir les correspondances existant entre le système augmenté (P1)+(P2), les points critiques d'une certaine fonctionnelle φ et une forme faible du système augmenté. À la section 1, nous définirons la fonctionnelle φ et nous établirons des conditions suffisantes (nécessaires et suffisantes si la fonction d'interaction ne dépend pas directement de t et x mais seulement de $u(t,x)$) pour qu'elle soit de classe C^1 . À la section 2, nous comparons deux façons de définir la condition Dirichlet- périodique normalisée (u est T -périodique par rapport à la variable t , u "vaut zéro" sur $[0, T] \times \partial\Omega$) pour les fonctions appartenant à $W^{1,p}(\Omega_T; R^M)$. La première approche définit $W^{1,p}(\Omega_T; R^M) \cap \{u \text{ satisfait une condition Dirichlet - périodique normalisée}\}$ comme étant la fermeture dans $W^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ d'une certaine classe de fonctions $D_T(\Omega_T; R^M) \subset C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega}; R^M)$ qui satisfont la condition Dirichlet-périodique au sens classique. La deuxième façon utilise la théorie des traces et n'est applicable que si Ω est suffisamment régulier. Dans la troisième section on veut savoir sous quelles conditions on aura l'implication :

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} u \in W^{1,p}(\Omega_T; R^M) \\ u \text{ satisfait une condition Dirichlet - périodique normalisée} \\ \mathcal{J}u \in W^{1,p}(\Omega_T; R^M) \\ \mathcal{J}u \text{ satisfait une condition Dirichlet - périodique normalisée} \end{array} \right].$$

Dans la section 4, on utilise les résultats techniques trouvés dans les sections 2 et 3 pour établir des correspondances entre trois versions du problème (P1)+(P2) et des correspondances entre trois versions du problème (P1).

2.1 Définition de la fonctionnelle.

La fonctionnelle φ se calcule par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\varphi(u, v) &= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} v_i + d_i \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial v_i}{\partial x} \right\rangle_{R^N} - (f_i \circ u) v_i \right] dt dx \\
&= \int_{\Omega_T} \left[\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \langle f \circ u, v \rangle_{R^M} \right] dt dx \quad (29)
\end{aligned}$$

où $D^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x}$ et $D^{1/2} \frac{\partial v}{\partial x}$ sont les matrices suivantes

$$D^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x} = \left[(d_i)^{1/2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mid 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N \right], \quad D^{1/2} \frac{\partial v}{\partial x} = \left[(d_i)^{1/2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mid 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N \right]$$

et où le produit scalaire de deux matrices A,B de format $M \times N$ est défini par

$$\langle A, B \rangle_{R^{MN}} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} a_{ij} b_{ij}.$$

Le domaine de la fonctionnelle φ est l'espace de Sobolev $H_{T,0}^1(\Omega_T; R^{2M})$. On définit maintenant cet espace ainsi quelques autres qui nous seront utiles.

Définition 2.1.1

$$1. \quad H^{1,p}(\Omega_T) = W^{1,p}(\Omega_T) = \left\{ u \in L^p(\Omega_T) \mid \begin{array}{l} \text{les dérivées au sens des distributions} \\ \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \in L^p(\Omega_T). \end{array} \right\},$$

$$H^{1,p}(\Omega_T; R^K) = W^{1,p}(\Omega_T; R^K) = \left\{ u \in L^p(\Omega_T; R^K) \mid \begin{array}{l} \text{les K composantes de u} \\ u_1, \dots, u_K \in H^{1,p}(\Omega_T) \end{array} \right\},$$

$$H^1(\Omega_T) = W^1(\Omega_T) = H^{1,2}(\Omega_T), \quad H^1(\Omega_T; R^K) = W^1(\Omega_T; R^K) = H^{1,2}(\Omega_T; R^K).$$

2. On définit les normes suivantes pour les espaces $H^{1,p}(\Omega_T; R^K)$, pour $p \in [1, \infty[$

$$\|u\|_{H^{1,p}} = \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq K \\ 0 \leq |\alpha| \leq 1}} \|\partial^\alpha u_i\|_{L^p}^p \right)^{1/p}. \quad \text{Pour le cas limite } p = \infty, \text{ la norme devient}$$

$$\|u\|_{H^{1,\infty}} = \left(\max_{\substack{1 \leq i \leq K \\ 0 \leq |\alpha| \leq 1}} \|\partial^\alpha u_i\|_{L^\infty} \right) \quad \text{Si } p' \text{ est le conjugué de } p \text{ alors la formule suivante définit}$$

un produit de dualité qui dans le cas $p = p' = 2$ est un produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H.p.p'} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq K \\ 0 \leq |\alpha| \leq 1}} \int_{\Omega_T} (\partial^\alpha u_i)(\partial^\alpha v_i) dt dx.$$

$$3. D_T(\Omega_T) = \left\{ u \in C^\infty(\Omega_T) \left| \begin{array}{l} \partial^\alpha u(0, x) = \partial^\alpha u(T, x) \forall \text{ multi - indice } \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N), \\ \text{Supp}(u(t, \cdot)) \subset\subset \Omega, \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \right\}$$

$$D_T(\Omega_T; R^K) = \left\{ u \in C^\infty(\Omega_T; R^K) \left| \begin{array}{l} \text{les composantes de } u, \\ u_1, \dots, u_K \in D_T(\Omega_T) \end{array} \right. \right\}$$

$$4. H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^K) = \overline{D_T(\Omega_T; R^K)} \text{ la fermeture est prise dans l'espace } H^{1,p}(\Omega_T; R^K).$$

$$5. W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^K) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega_T; R^K) \left| \begin{array}{l} \text{trace}(u, t=0) = \text{trace}(u, t=T), \\ \text{trace}(u, [0, T] \times \partial\Omega) = 0. \end{array} \right. \right\}, \text{ l'égalité ou non}$$

de $H^{1,p}(\Omega_T)$ avec $W^{1,p}(\Omega_T)$ dépend du domaine Ω et en particulier de la régularité de sa frontière $\partial\Omega$. \square

Nous pourrons bientôt énoncer et démontrer des conditions suffisantes pour que φ soit de classe C^1 sur $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M})$ et de façon plus générale des conditions pour qu'elle soit de classe C^1 sur $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T_0}^{1,q}(\Omega_T; R^M)$. Nous aurons toutefois besoin de deux petits lemmes : le premier donnera de petites variations de l'inégalité de Hölder et le second sera un corollaire du théorème d'immersion de Sobolev.

Lemme 2.1.2 (Des variantes de l'inégalité de Hölder)

- Soient $p(1), \dots, p(K), r \in [1, \infty]$ tels que $\sum_{i=1}^K (p(i))^{-1} = r^{-1}$.

Soient des fonctions $u_i \in L^{p(i)}(\Omega_T; R)$ ($1 \leq i \leq K$).

Alors le produit $\prod_{i=1}^K u_i \in L^r(\Omega_T; R)$ et

$$\left\| \prod_{i=1}^K u_i \right\|_{L^r} \leq \prod_{i=1}^K \|u_i\|_{L^{p(i)}}. \quad (30)$$

- Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$.

Soient $u \in L^p(\Omega_T; R^L)$, $v \in L^q(\Omega_T; R^L)$.

Alors $\langle u, v \rangle_{R^L} \in L^r(\Omega_T; R)$ et

$$\|\langle u, v \rangle_{R^L}\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}. \quad (31)$$

Démonstration :

La preuve de (30) se fera par induction sur K .

Pour $K=1$, l'affirmation est triviale.

Supposons que $K=2$. Si $p(1) = \infty$ ou $p(2) = \infty$ alors (30) est trivial. Supposons que

$p(1), p(2), r \in [1, \infty[$ et définissons $\tilde{u}_i(t, x) = |u_i(t, x)|^r$ ($i=1, 2$) alors par l'inégalité de

Hölder classique

$$\|u_1 u_2\|_{L^r}^r = \|\tilde{u}_1 \tilde{u}_2\|_{L^1} \leq \|\tilde{u}_1\|_{L^{p(1)/r}} \|\tilde{u}_2\|_{L^{p(2)/r}} = \|u_1\|_{L^{p(1)}}^r \|u_2\|_{L^{p(2)}}^r.$$

Prenons $K \geq 3$ et supposons que (30) est prouvée pour $2, \dots, K-1$. Définissons

$$\hat{r}^{-1} = \sum_{i=1}^{K-1} p(i)^{-1}, \text{ on a alors}$$

$$\left\| \prod_{i=1}^K u_i \right\|_{L^r} \leq \left\| \prod_{i=1}^{K-1} u_i \right\|_{L^{\hat{r}}} \|u_K\|_{L^{p(K)}} \leq \prod_{i=1}^K \|u_i\|_{L^{p(i)}}.$$

La preuve de (30) est terminée.

Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$. Soient $u \in L^p(\Omega_T; R^L)$ et $v \in L^q(\Omega_T; R^L)$.

Dénotons par $\|u\|_{R^L}$ et $\|v\|_{R^L}$ les fonctions définies par $\|u\|_{R^L}(t, x) = \|u(t, x)\|_{R^L}$ et

$\|v\|_{R^L}(t, x) = \|v(t, x)\|_{R^L}$. L'équation (30) avec $K=2$ et les calculs qui suivent démontrent

alors (31).

$$\|\langle u, v \rangle_{R^L}\|_{L^r} \leq \| \|u\|_{R^L} \|v\|_{R^L} \|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}. \quad \square$$

Lemme 2.1.3

Soit $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné quelconque.

Dénotons par $X \hookrightarrow Y$ l'inclusion continue (immersion) d'un espace dans un autre.

On a les immersions suivantes :

$$H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T) \prec L^{\frac{(N+1)p}{N+1-p}}(\Omega_T) \quad (\forall p \in [1, N+1]), \quad (32)$$

$$H_{T_0}^{1,N+1}(\Omega_T) \prec L^q(\Omega_T) \quad (\forall q \in [1, \infty]), \quad (33)$$

$$H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T) \prec C^{1,\lambda}(\Omega_T) \left(\forall \lambda \in \left] 0, 1 - \frac{N+1}{p} \right], \forall p \in]N+1, \infty[\right). \quad (34)$$

Démonstration :

Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un cube ouvert contenant Ω . On remarque que $K_T \stackrel{\text{def}}{=} [0, T] \times K$ satisfait la propriété Lipschitz locale forte. En combinant le théorème d'immersion de Sobolev (le théorème 5.4 dans Adams [1]) avec le fait que K_T est borné (et donc de mesure finie), on obtient les immersions suivantes :

$$H^{1,p}(K_T) \prec L^{\frac{(N+1)p}{N+1-p}}(K_T) \quad (\forall p \in [1, N+1]),$$

$$H^{1,N+1}(K_T) \prec L^q(K_T) \quad (\forall q \in [1, \infty]),$$

$$H^{1,p}(K_T) \prec C^{1,\lambda}(K_T) \left(\forall \lambda \in \left] 0, 1 - \frac{N+1}{p} \right], \forall p \in]N+1, \infty[\right).$$

Autrement dit il existe des constantes $C_1(p), C_2(q), C_3(p, \lambda) > 0$ telles que :

$$\|u\|_{L^{\frac{(N+1)p}{N+1-p}}(K_T)} \leq C_1(p) \|u\|_{H^{1,p}(K_T)} \quad (\forall u \in H_{T_0}^{1,p}(K_T), \forall p \in [1, N+1]), \quad (35)$$

$$\|u\|_{L^q(K_T)} \leq C_2(q) \|u\|_{H^{1,N+1}(K_T)} \quad (\forall u \in H^{1,N+1}(K_T), \forall q \in [1, \infty]), \quad (36)$$

$$\|u\|_{C^{\alpha,\lambda}(K_T)} \leq C_3(p, \lambda) \|u\|_{H^{1,p}(K_T)} \left(\forall u \in H^{1,p}(K_T), \forall p \in]N+1, \infty[, \forall \lambda \in \left] 0, 1 - \frac{N+1}{p} \right] \right). \quad (37)$$

Prenons $\hat{u} \in D_T(\Omega_T)$ et prolongeons cette fonction à la valeur 0 sur $[0, T] \times (K - \Omega)$. On a alors que $\|\hat{u}\|_{L^q(\Omega_T)} = \|\hat{u}\|_{L^q(K_T)}$ et $\|\partial^\alpha \hat{u}\|_{L^q(\Omega_T)} = \|\partial^\alpha \hat{u}\|_{L^q(K_T)}$ pour tout $p \in [1, \infty]$ et pour tout multi-indice α . Donc si on remplace K_T par Ω_T et u par \hat{u} , les inéquations (35), (36) et (37) demeurent vraies. Comme $D_T(\Omega_T)$ est dense dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$ les immersions (32), (33) et (34) sont vraies. \square

Lemme 2.1.4

Soient X, Y des espaces de Banach de fonctions mesurables $(\Omega_T, \beta(\Omega_T), dt dx) \rightarrow (R^M, \beta(R^M))$ et supposons que X, Y, Ω_T, f satisfont les conditions qui suivent :

(H1) f et $\partial f / \partial y$ sont des fonctions continues sur $\Omega_T \times R^M$.

(H2) En posant pour $(u, v, a) \in X \times Y \times X$, pour $i=1, \dots, M$,

$$A_i(u, v) = \frac{\partial u_i}{\partial t} v_i, \quad B_i(u, v) = \langle \nabla_x u_i, \nabla_x v_i \rangle_{R^N},$$

$$C_i(u, v) = (f_i \diamond u) v_i, \quad D_i(u, v, a) = v_i \langle (\nabla_y f_i) \diamond u, a \rangle_{R^M};$$

on définit des applications continues vers l'espace $L^1(\Omega_T; R)$.

(H3) L'expression $E_i(u, v, a, \lambda) = \lambda^{-1} \{f_i \diamond [u + \lambda a] - f_i \diamond u\} v_i$ ($(u, v, a) \in X \times Y \times X$, $\lambda \in R - \{0\}$) converge vers $D_i(u, v, a)$ dans $L^1(\Omega_T; R)$.

Alors la fonctionnelle $\varphi : X \times Y \rightarrow R$ définie par:

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} v_i + d_i \langle \nabla_x u_i, \nabla_x v_i \rangle - (f_i \diamond u) v_i \right] dt dx, \\ &= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} [A_i(u, v) + d_i B_i(u, v) - C_i(u, v)] dt dx, \end{aligned} \quad (38)$$

est de classe C^1 sur $X \times Y$ et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} (\varphi'(u, v), (a, b)) &= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} b_i + u_i \frac{\partial a_i}{\partial t} + d_i \langle \nabla_x u_i, \nabla_x b_i \rangle + d_i \langle \nabla_x v_i, \nabla_x a_i \rangle \right. \\ &\quad \left. - (f_i \diamond u) b_i - v_i \langle (\nabla_y f_i) \diamond u, a \rangle_{R^M} \right] dt dx, \\ &= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[A_i(u, b) + A_i(a, v) + d_i B_i(u, b) + d_i B_i(a, v) \right. \\ &\quad \left. - C_i(u, b) - D_i(u, v, a) \right] dt dx. \end{aligned} \quad (39)$$

De plus si $(\hat{u}, \hat{v}) \in X \times Y$ est un point critique de φ alors $(\hat{u}, 0)$ est critique lui aussi.

Démonstration:

Prenons $(u, v), (a, b) \in X \times Y$. Si elle existe, la dérivée directionnelle de φ au point (u, v) dans la direction (a, b) est donnée par la limite suivante :

$$\begin{aligned}
(\varphi'(u, v), (a, b)) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-1} \{ \varphi(u + \lambda a, v + \lambda b) - \varphi(u, v) \} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[A_i(u, b) + A_i(a, v) + d_i B_i(u, b) + d_i B_i(a, v) \right. \\
&\quad \left. - C_i(u + \lambda a, v) - E_i(u, v, a, \lambda) \right] dt dx. \quad (40)
\end{aligned}$$

La validité de (39) découle alors trivialement des hypothèses (H2) et (H3).

L'examen des termes du deuxième membre de (39) nous permet de constater que l'application $(a, b) \mapsto (\varphi'(u, v), (a, b))$ est bien linéaire pour chaque $(u, v) \in X \times Y$, cet opérateur linéaire est borné (i.e. continue) par l'hypothèse (H2). La continuité de l'application $(u, v) \mapsto \varphi'(u, v)$ découle également de (H2).

Prenons maintenant (\hat{u}, \hat{v}) un point critique de φ , alors on a que :

$$(\varphi'(\hat{u}, \hat{v}), (a, b)) = 0, \quad \forall (a, b) \in X \times Y. \quad (41)$$

En particulier, (41) est vrai avec $a = 0$. En utilisant (39), on obtient le calcul suivant pour les $(a, b) \in X \times Y$:

$$\begin{aligned}
0 &= (\varphi'(\hat{u}, \hat{v}), (0, b)), \\
&= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} b_i + \langle \nabla_x u_i, \nabla_x b_i \rangle_{\mathbb{R}^N} - (f_i \circ u) b_i \right] dt dx, \\
&= (\varphi'(\hat{u}, 0), (a, b)).
\end{aligned}$$

Le point $(\hat{u}, 0)$ est donc un point critique de φ . \square

On pourrait utiliser les lemmes 2.1.3 et 2.1.4 pour étudier systématiquement des résultats de différentiabilité de la fonctionnelle φ définie sur les domaines $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; \mathbb{R}^M) \times H_{T_0}^{1,q}(\Omega_T; \mathbb{R}^M)$ pour tous les $(p, q) \in [1, \infty]$. Le nombre de cas à considérer est toutefois très grand. En effet, les valeurs $p = 1, N+1, \infty$ correspondent à des changements de comportement des espaces $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; \mathbb{R}^M)$ vis à vis des résultats d'immersion ce qui induit la partition suivante $[1, \infty]^2 = (\{1\} \cup]1, N+1[\cup \{N+1\} \cup]N+1, \infty[\cup \{\infty\})^2$. Comme l'ensemble des valeurs possibles de (p, q) est en réalité $[1, \infty]^2 \cap \{p^{-1} + q^{-1} \leq 1\}$, le nombre de cas à considérer se complique encore. Comme les points critiques de la forme $(\hat{u}, 0)$ suffiront pour résoudre le système de diffusion-réaction (P1), on peut sans problème restreindre l'espace de la variable fonctionnelle v . En appliquant l'inégalité de Hölder aux différentes expressions du membre de droite de (39) on voit que plus q est grand, plus on a de liberté sur la

valeur de p et moins les conditions requises pour obtenir une solution u au problème (P1) seront contraignantes. On obtient le résultat suivant.

Théorème 2.1.5

Voici des conditions suffisantes pour que φ soit de classe C^1 sur $H_{T0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T0}^{1,\infty}(\Omega_T; R^M)$, satisfasse (39) et possède la propriété que

(\hat{u}, \hat{v}) point critique de $\varphi \Rightarrow (\hat{u}, 0)$ point critique de φ ,

pour différentes valeurs de $p \in [1, \infty]$.

1. Pour $p \in [1, N + 1[$.

(H1) (voir lemme 2.1.4)

(D1) Ω est borné.

(D2) La fonction d'interaction f satisfait la condition de croissance:

$$\|f(t, x, y)\|_{R^M} \leq \alpha_1 \|y\|_{R^M}^{(N-1)p/[(N-2)p-(N+1)]} + \alpha_2(t, x) \quad (t, x, y) \in \Omega_T \times R^M,$$

pour un certain $\alpha_1 \in]0, \infty[$ et un certain $\alpha_2 \in L^1(\Omega_T; R)$.

(D3) La matrice de dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial y}$ satisfait la condition de croissance:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, \hat{y}) \right\|_{R^{M^2}}^{(N+1)p/[(N-2)p-(N+1)]} \leq \alpha_3 \|\hat{y}\|_{R^M}^{(N-1)p/(N-1-p)} + \alpha_4(t, x)$$

$$(t, x, \hat{y}) \in \Omega_T \times R^M,$$

pour un certain $\alpha_3 \in]0, \infty[$ et un certain $\alpha_4 \in L^1(\Omega_T; R)$.

2. Pour $p = N + 1$.

(H1) et (D1).

(D4) La fonction f satisfait une condition de croissance de la forme :

$$\|f(t, x, y)\|_{R^M} \leq \alpha_5 \|y\|_{R^M}^q + \alpha_6(t, x) \quad (t, x, y) \in \Omega_T \times R^M,$$

pour un certain $q \in [1, \infty[$, un certain $\alpha_5 \in]0, \infty[$ et un certain $\alpha_6 \in L^1(\Omega_T; R)$.

(D5) La fonction $\partial f / \partial y$ satisfait une condition de croissance de la forme:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, \hat{y}) \right\|_{R^{M^2}}^s \leq a_7 \|\hat{y}\|_{R^M}^r + a_8(t, x) \quad (t, x, \hat{y}) \in \Omega_T \times R^M,$$

pour certains $r, s \in]1, \infty[$, un certain $a_7 \in]0, \infty[$ et un certain $a_8 \in L^1(\Omega_T; R)$.

3. Pour $p \in]N+1, \infty]$.

(H1), (D1) et (D4).

(D6) La fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ satisfait une condition de croissance de la forme:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, \hat{y}) \right\|_{R^{M^2}} \leq a_9 \|\hat{y}\|_{R^M}^r + a_{10}(t, x) \quad (t, x, \hat{y}) \in \Omega_T \times R^M,$$

pour un certain $r \in [1, \infty[$, un certain $a_9 \in]0, \infty[$ et un certain $a_{10} \in L^1(\Omega_T; R)$.

4. Pour $p \in]N+1, \infty]$.

(H1) et (D1).

(D7) Pour tout borné $B \subset R^M$, $f(\Omega_T \times B)$ est borné dans R^M .

(D8) Pour tout borné $B \subset R^M$, $\partial f / \partial y(\Omega_T \times B)$ est bornée dans $R^{M \times M}$ l'espace des matrices réelles $M \times M$.

Démonstration :

Étape 1 : *Toutes les affirmations qu'il n'est pas nécessaire de traiter cas par cas.*

L'hypothèse (H1) appartient explicitement aux quatre ensembles d'hypothèses. Nous pouvons vérifier immédiatement qu'une partie de l'hypothèse (H2) est valide pour les quatre situations. Soit $\{(u^n, v^n, a^n)\}$ une suite convergente vers un élément (u, v, a) dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T_0}^{1,\infty}(\Omega_T; R^M) \times H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$. Par l'inégalité de Hölder

$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} v_i^n \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} v_i$ dans $L^p(\Omega_T; R)$. Par l'hypothèse (D1), on a $L^p(\Omega_T; R) \prec L^1(\Omega_T; R)$ et

la continuité des A_i ($i=1, \dots, M$) est démontrée. La continuité des B_i se démontre de façon semblable.

Étape 2 : Vérification pour chacun des quatre cas de la véracité de (H2).

Démontrons la continuité des applications C_i, D_i ($i=1, \dots, M$) pour chacune des quatre situations. Dans le premier cas, comme $p \in [1, N+1[$ on a que $u^n \rightarrow u$ dans $L^{(N+1)p/(N+1-p)}(\Omega_T; R^M)$ et par l'hypothèse (D2) $f_i \diamond u^n \rightarrow f_i \diamond u$ dans $L^1(\Omega_T; R)$. Comme $v^n \rightarrow v$ dans $L^\infty(\Omega_T; R^M)$ on a (par l'inégalité de Hölder) que $C_i(u^n, v^n) = (f_i \diamond u_i^n) v_i^n \rightarrow C_i(u, v)$ dans $L^1(\Omega_T; R)$. Pour le terme D_i , on a par (D3) que que $\frac{\partial f}{\partial y} \diamond u^n \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \diamond u$ dans $L^{(N+1)p/[(N+2)p-(N+1)]}(\Omega_T; R^M)$. Par l'inégalité de Hölder, on trouve que $v_i^n \langle (\nabla_y f_i) \diamond u^n, \alpha^n \rangle_{R^M} \rightarrow v_i \langle (\nabla_y f_i) \diamond u, \alpha \rangle_{R^M} = D_i(u, v, \alpha)$ dans $L^1(\Omega_T; R)$.

Supposons maintenant que $p=N+1$ et que les hypothèses (H1), (D1), (D4) et (D5) s'appliquent. Comme $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^q(\Omega_T; R^M)$ et $H_{T_0}^{1,\infty}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^\infty(\Omega_T; R^M)$ on a alors $u^n \rightarrow u$ dans $L^q(\Omega_T; R^M)$ (pour le q de l'hypothèse (D4)) et $v^n \rightarrow v$ dans $L^\infty(\Omega_T; R^M)$. Par l'hypothèse (D4) on a ensuite que $f \diamond u^n \rightarrow f \diamond u$ dans $L^1(\Omega_T; R^M)$ et finalement par l'inégalité de Hölder on a que $(f_i \diamond u^n) v^n \rightarrow (f_i \diamond u) v = C_i(u, v)$ dans $L^1(\Omega_T; R)$. Pour le terme D_i , on a par l'hypothèse (D5) et l'immersion $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^r(\Omega_T; R^M)$ que $\frac{\partial f}{\partial y} \diamond u^n \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \diamond u$ dans $L^s(\Omega_T; R^{M \times M})$. D'autre part, on a que $\alpha^n \rightarrow \alpha$ dans $L^{s/(s-1)}(\Omega_T; R^M)$ et $v_i^n \rightarrow v_i$ dans $L^\infty(\Omega_T; R)$. Par l'inégalité de Hölder $v_i^n \langle (\nabla_y f_i) \diamond u^n, \alpha^n \rangle_{R^M} \rightarrow v_i \langle (\nabla_y f_i) \diamond u, \alpha \rangle_{R^M}$ dans $L^1(\Omega_T; R)$.

Supposons que $p \in]N+1, \infty]$ et que les hypothèses (H1), (D1), (D4) et (D6) sont vraies. Alors on a les immersions $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow C(\overline{\Omega_T}; R^M) \hookrightarrow L^\infty(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^q(\Omega_T; R^M)$ et l'hypothèse (D4) entraîne que $f \diamond u^n \rightarrow f \diamond u$ dans $L^1(\Omega_T; R^M)$. D'autre part $v^n \rightarrow v$ dans $L^\infty(\Omega_T; R^M)$ et par l'inégalité de Hölder $(f_i \diamond u^n) v^n \rightarrow (f_i \diamond u) v = C_i(u, v)$ dans $L^1(\Omega_T; R)$. Pour les termes D_i ($i=1, \dots, M$), nous utilisons les immersions

$H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \prec C(\overline{\Omega}_T; R^M) \prec L^\infty(\Omega_T; R^M) \prec L^1(\Omega_T; R^M)$ et l'hypothèse (D6) pour déduire que $\frac{\partial f}{\partial y} \diamond u^n \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \diamond u$ dans $L^1(\Omega_T; R^{M \cdot M})$. D'autre part on a les convergences $v_i^n \rightarrow v_i$ dans $L^\infty(\Omega_T; R)$ et $a^n \rightarrow a$ dans $L^\infty(\Omega_T; R^M)$ (par l'immersion $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \prec C(\overline{\Omega}_T; R^M)$). Par l'inégalité de Hölder, on a donc la convergence $v_i^n \langle (\nabla_y f_i) \diamond u^n, a^n \rangle_{R^M} \rightarrow v_i \langle (\nabla_y f_i) \diamond u, a \rangle_{R^M} = D_i(u, v, a)$ dans $L^1(\Omega_T; R)$.

Plaçons nous maintenant dans la quatrième situation, supposons que $p \in]N+1, \infty]$ et que les hypothèses (H1), (D1), (D7), (D8) s'appliquent. Soit :

$$\rho = \supremum \left\{ \|u^n\|_{L^\infty}, \|v^n\|_{L^\infty}, \|a^n\|_{L^\infty} : n = 1, 2, 3, \dots \right\} \quad (42)$$

$\rho < \infty$ à cause des immersions $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \prec C(\overline{\Omega}_T; R^M)$ et $H_{T_0}^{1,\infty}(\Omega_T; R^M) \prec L^\infty(\Omega_T; R^M)$.

Soient :

$$\nu = \supremum \left\{ \|f(t, x, \hat{y})\| : (t, x, \hat{y}) \in \Omega_T \times R^M, \|\hat{y}\| \leq \rho \right\}, \quad (43)$$

$$\sigma = \supremum \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, \hat{y}) \right\| : (t, x, \hat{y}) \in \Omega_T \times R^M, \|\hat{y}\| \leq \rho \right\}. \quad (44)$$

Les constantes $\nu, \sigma < \infty$ par les hypothèses (D7) et (D8). On peut alors dominer les suites $\{C_i(u^n, v^n) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ et $\{D_i(u^n, v^n, a^n) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ par des fonction constantes sur Ω_T .

$$|C_i(u^n, v^n)(t, x)| = |f_i(t, x, u^n(t, x))v_i^n(t, x)| \leq \nu \rho \quad \text{p.p. dans } \Omega_T \quad (45)$$

$$|D_i(u^n, v^n, a^n)(t, x)| = |v_i^n(t, x) \langle (\nabla_y f_i) \diamond u^n(t, x), a^n(t, x) \rangle_{R^M}| \leq \sigma \rho^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega_T \quad (46)$$

D'autre part, la convergence $(u^n, v^n, a^n) \rightarrow (u, v, a)$ dans $L^\infty(\Omega_T; R^{3M})$ et la continuité de

f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\Omega_T \times R^M$ entraînent que :

$$C_i(u^n, v^n)(t, x) \rightarrow C_i(u, v)(t, x) \quad \text{p.p. dans } \Omega_T, \quad (47)$$

$$D_i(u^n, v^n, a^n)(t, x) \rightarrow D_i(u, v, a)(t, x) \quad \text{p.p. dans } \Omega_T. \quad (48)$$

Par (45) à (48), la mesure finie de Ω_T et le théorème de convergence dominée $C_i(u^n, v^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_i(u, v)$, $D_i(u^n, v^n, a^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D_i(u, v, a)$ dans $L^1(\Omega_T; R)$.

Étape 3 : Vérification de la véracité de (H3).

Par un résultat de la section 1.3, on a l'égalité suivante :

$$[\lambda^{-1} \{f_i \circ [u + \lambda \alpha] - f_i \circ u\}](t, x) = \langle (\nabla_y f_i) \circ [u + \lambda \theta_{\lambda, u, a} \alpha](t, x), a(t, x) \rangle_{R^M}, \quad (49)$$

pour $\lambda \in R - \{0\}$, pour (t, x) p.p. dans Ω_T , pour un certain

$$\theta_{\lambda, u, a} : (\Omega_T; \beta(\Omega_T)) \rightarrow ([0, 1], \beta[0, 1]). \quad (50)$$

On a donc que

$$[E_i(u, v, a, \lambda)](t, x) = [v_i \langle (\nabla_y f_i) \circ [u + \lambda \theta_{\lambda, u, a} \alpha], a \rangle_{R^M}](t, x), \quad (t, x) \text{ p.p. dans } \Omega_T. \quad (51)$$

Comme Ω_T est de mesure finie dans chacune des quatre situations, il suffit de trouver pour chacune des quatre situations des constantes $\alpha, \beta, \gamma \in [1, \infty]$ tels que :

$$\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} \leq 1, \quad (52)$$

$$v \in H_{T_0}^{1, \infty}(\Omega_T; R^M) \Rightarrow v \in L^\alpha(\Omega_T; R^M), \quad (53)$$

$$a \in H_{T_0}^{1, p}(\Omega_T; R^M) \Rightarrow a \in L^\beta(\Omega_T; R^M), \quad (54)$$

$$\lambda \rightarrow 0 \text{ dans } R \Rightarrow (\nabla_y f_i) \circ [u + \lambda \theta_{\lambda, u, a} \alpha] \rightarrow (\nabla_y f_i) \circ u \text{ dans } L^\gamma(\Omega_T; R^M), \quad (55)$$

pour que (H3) soit vérifiée. En effet, on a alors par le lemme 2.1.3 que

$$E_i(u, v, a, \lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} D_i(u, v, a) \text{ dans } L^{\{\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1}\}^{-1}}$$

et la mesure finie de Ω_T entraîne que $E_i(u, v, a, \lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} D_i(u, v, a)$ dans $L^1(\Omega_T; R)$.

Le tableau ci-dessous donne les choix de α , β , γ que nous avons effectués pour chacune des quatre situations.

Situation (valeur de p , hypothèses en vigueur)	α	β	γ
$p \in [1, N+1[$, (H1),(D1),(D2),(D3)	$\alpha = \infty$	$\beta = (N+1)p/(N+1-p)$	$\gamma = (N+1)p/[(N+2)p - (N+1)]$
$p = N+1$, (H1),(D1),(D4),(D5)	$\alpha = \infty$	$\beta = s/(s-1)$	$\gamma = s$
$p \in]N+1, \infty]$, (H1),(D1),(D4),(D6)	$\alpha = \infty$	$\beta = \infty$	$\gamma = 1$
$p \in]N+1, \infty]$, (H1),(D1),(D7),(D8)	$\alpha = \infty$	$\beta = \infty$	$\gamma = 1$

Il est facile de vérifier que chacun de ces choix de (α, β, γ) satisfait (52). Le choix $\alpha = \infty$ satisfait (53) pour les quatre situations par l'immersion $H_{T_0}^{1, \infty}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^\infty(\Omega_T; R^M)$. Le choix $\beta = (N+1)p/(N+1-p)$ satisfait (54) dans la situation décrite à la première ligne du tableau par l'immersion $H_{T_0}^{1, p}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^{\frac{(N+1)p}{(N+1-p)}}(\Omega_T; R^M)$; le choix $\beta = s/(s-1)$ convient pour la situation décrite à la deuxième ligne car pour $p = N+1$ on a les immersions $H_{T_0}^{1, N+1}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^c(\Omega_T; R^M)$ pour tous les $c \in [1, \infty[$; le choix $\beta = \infty$ convient pour les lignes 3 et 4 du tableau car pour $p \in]N+1, \infty]$ on a les immersions $H_{T_0}^{1, p}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow C(\overline{\Omega_T}; R^M) \hookrightarrow L^\infty(\Omega_T; R^M)$. Nous devons maintenant justifier le choix des valeurs de γ pour chacune des quatre situations.

Dans la situation no 1, la condition de croissance (D3) nous dit que $\partial f / \partial y$ est

$$\left(\frac{(N+1)p}{N+1-p}, \frac{(N+1)p}{[(N+2)p - (N+1)]} \right) \diamond\text{-préservante. D'autre part } u, a \in L^{\frac{(N+1)p}{N+1-p}}(\Omega_T; R^M) \text{ car}$$

pour $p \in [1, N+1[$ on a l'immersion $H_{T_0}^{1, p}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^{\frac{(N+1)p}{N+1-p}}(\Omega_T; R^M)$; on a aussi que

$$\|\theta_{\lambda, u, a}\|_{L^\infty} \leq 1 \text{ ce qui entraîne que } u + \lambda \theta_{\lambda, u, a} a \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} u \text{ dans } L^{\frac{(N+1)p}{N+1-p}}(\Omega_T; R^M) \text{ et que}$$

$$(\nabla_y f_i) \diamond [u + \lambda \theta_{\lambda, u, a} a] \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} (\nabla_y f_i) \diamond u \text{ dans } L^\gamma(\Omega_T; R^M) \text{ pour } \gamma = \frac{(N+1)p}{[(N+2)p - (N+1)]}.$$

Dans la situation no 2, on suppose $p=N+1$ et on a les immersions $H_{T_0}^{1,N+1} \hookrightarrow L^c$ pour tous les $c \in [1, \infty[$, en particulier $u, a \in L^c(\Omega_T; R^M)$ ce qui entraîne que $[u + \lambda \theta_{\lambda, u, a}] \rightarrow u$ dans $L^c(\Omega_T; R^M)$. Par la condition de croissance (D5), $(\nabla_y f_i) \circ [u + \lambda \theta_{\lambda, u, a}] \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} (\nabla_y f_i) \circ u$ dans $L^c(\Omega_T; R^M)$, ce qui justifie le choix $\gamma=c$.

Dans la situation no 3, on a que $p \in]N+1, \infty]$ et que Ω_T est borné. On a donc les immersions $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow C(\overline{\Omega_T}; R^M) \hookrightarrow L^c(\Omega_T; R^M)$. Par conséquent $[u + \lambda \theta_{\lambda, u, a}] \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} u$ dans $L^c(\Omega_T; R^M)$ et la condition de croissance (D5) implique que $(\nabla_y f_i) \circ [u + \lambda \theta_{\lambda, u, a}] \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} (\nabla_y f_i) \circ u$ dans $L^c(\Omega_T; R^M)$. Le choix $\gamma=1$ satisfait donc (55) dans la situation no 3.

Dans la situation no 4, on a encore que $p \in]N+1, \infty]$ et que Ω_T est borné. Comme $u, a \in L^\infty(\Omega_T; R^M)$, on a par la continuité de $\partial f / \partial y$ que :

$$\{(\nabla_y f_i) \circ [u + \lambda \theta_{\lambda, u, a}]\}(t, x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \{(\nabla_y f_i) \circ u\}(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \text{ p.p. dans } \Omega_T. \quad (56)$$

On peut sans perte de généralité se restreindre aux λ tels que $|\lambda| \leq 1$. Posons

$$\zeta = \|u\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty} \text{ et } B = \{y \in R^M : \|y\| \leq \zeta\}. \quad (57)$$

Par l'hypothèse (D8), l'ensemble $\nabla_y f_i(\Omega_T \times B)$ est borné dans R^M . Le nombre

$$\tau = \supremum \{ \|\nabla_y f_i(t, x, \hat{y})\| : (t, x, \hat{y}) \in \Omega_T \times B \} \quad (58)$$

est donc fini.

La famille de fonctions $\{(\nabla_y f_i) \circ [u + \lambda \theta_{\lambda, u, a}] - (\nabla_y f_i) \circ u\}_{R^M} : 0 < |\lambda| \leq 1\}$ est donc dominée par la fonction constante 2τ dans $L^1(\Omega_T; R)$. Par le théorème de convergence dominée on a que $(\nabla_y f_i) \circ [u + \lambda \theta_{\lambda, u, a}] \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} (\nabla_y f_i) \circ u$ dans $L^1(\Omega_T; R^M)$. On a donc montré que $\gamma=1$ satisfait (55) quand on se trouve dans la situation no 4. \square

Comme les espaces de Hilbert possèdent des propriétés d'approximation plus intéressantes que les autres espaces de Banach, on donne un résultat sur la différentiabilité de φ sur l'espace de Hilbert $H^1(\Omega_T; R^{2M}) = H^{1,2}(\Omega_T; R^{2M})$.

Théorème 2.1.6

Supposons que la fonction d'interaction f et le domaine Ω satisfont les conditions ci-après.

(H1) f et $\partial f / \partial y$ sont des fonctions continues sur $\Omega_T \times R^M$.

(D1) Ω est borné.

(D9) f est $\left(\frac{2N+2}{N-1}, \frac{2N+2}{N+3}\right)$ - \diamond -préservante.

(D10) $\frac{\partial f}{\partial y}$ est $\left(\frac{2N+2}{N-1}, \frac{N+1}{2}\right)$ - \diamond -préservante.

Alors la fonctionnelle φ est de classe C^1 sur $H^1_{T_0}(\Omega_T; R^{2M})$ et la dérivée est donnée par (39).

Démonstration :

Il suffit de vérifier que les conditions (H2) et (H3) du lemme 2.1.4 sont respectées. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit immédiatement que les expressions $A_i(u, v) = \frac{d \partial u_i}{\partial t} v_i$ et $B_i(u, v) = \langle \nabla_x u_i, \nabla_x v_i \rangle$ varient continuellement dans $L^1(\Omega_T)$ quand (u, v) varie dans $H^1(\Omega_T; R^{2M})$.

Prenons une suite $\{(u^n, v^n, a^n)\} \subset H^1_{T_0}(\Omega_T; R^{3M})$ convergente vers un certain $(u, v, a) \in H^1_{T_0}(\Omega_T; R^{3M})$ et montrons la continuité des applications C_i et D_i ($i = 1, \dots, M$).

- Pour montrer la continuité des C_i , on observe tout d'abord que

$$u^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \text{ dans } L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R^M),$$

et

$$f_i \text{ est } \left(\frac{2N+2}{N-1}, \frac{2N+2}{N+3} \right) \diamond\text{-préservante}$$

par l'immersion $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R^M)$ et l'hypothèse (D9). Il en découle que :

$$f_i \diamond u^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f_i \diamond u \text{ dans } L^{\frac{2N+2}{N-3}}(\Omega_T; R).$$

En utilisant encore une fois l'immersion $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R^M)$, on trouve

que $v_i^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v_i$ dans $L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R)$ et alors on obtient par l'inégalité de Hölder que :

$$C_i(u^n, v^n) \stackrel{\text{déf}}{=} (f_i \diamond u^n) v_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C_i(u, v) \text{ dans } L^1(\Omega_T; R).$$

- Vérifions la continuité des D_i ($i = 1, \dots, M$). L'immersion

$H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R^M)$ et l'hypothèse (D10) entraînent les convergences suivantes :

$$v_i^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v_i \text{ dans } L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R),$$

$$(\nabla_y f_i) \diamond u^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (\nabla_y f_i) \diamond u \text{ dans } L^{\frac{N+1}{2}}(\Omega_T; R^M),$$

$$a^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \text{ dans } L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R^M).$$

Comme d'autre part $\left[\frac{2N+2}{N-1} \right]^{-1} + \left[\frac{N+1}{2} \right]^{-1} + \left[\frac{2N+2}{N-1} \right]^{-1} = 1$, l'inégalité de Hölder

entraîne que :

$$D_i(u^n, v^n, a^n) \stackrel{\text{déf}}{=} v_i^n \langle (\nabla_y f_i) \diamond u^n, a^n \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} D_i(u, v, a) \text{ dans } L^1(\Omega_T; R).$$

Vérifions finalement l'hypothèse (H3). Fixons $(u, v, a) \in H^1(\Omega_T; R^{2M})$. Par le corollaire 1.2.4 (une des variantes du théorème des accroissements finis démontré à la section 1.2) il existe des fonctions mesurables $\theta_{i,\lambda} : \Omega_T \rightarrow [0,1]$ ($i \in \{1, \dots, M\}, \lambda \in R - \{0\}$) telles que :

$$\begin{aligned} E_i(u, v, a, \lambda) &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \lambda^{-1} \{f_i \diamond [u + \lambda a] - f_i \diamond u\} v_i \\ &= v_i \langle (\nabla_y f_i) \diamond [u + \lambda \theta_{i,\lambda} a], a \rangle_{R^M}. \end{aligned}$$

Comme $u, a \in L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R^M)$ et que $\|\theta_{i,\lambda}\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq 1$, on a la convergence :

$$u + \lambda \theta_{i,\lambda} a \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} u \text{ dans } L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R^M).$$

L'hypoth\u00e8se (D10) entraine alors la convergence :

$$(\nabla_y f_i) \diamond [u + \lambda \theta_{i,\lambda} a] \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} (\nabla_y f_i) \diamond u \text{ dans } L^{\frac{N+1}{2}}(\Omega_T; R^M).$$

Comme $v_i \in L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R)$ et $a \in L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; R^M)$ on a finalement par l'in\u00e9galit\u00e9 de H\u00f6lder que :

$$E_i(u, v, a, \lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} v_i \langle (\nabla_y f_i) \diamond u, a \rangle_{R^M} = D_i(u, v, a) \text{ dans } L^1(\Omega_T; R). \square$$

\u00c0 la derni\u00e8re section de ce chapitre, nous allons \u00e9tablir que pour chacune des situations d\u00e9crites dans les th\u00e9or\u00e8mes sur la diff\u00e9rentiabilit\u00e9 de φ , les points critiques de φ nous donnent les solutions dans un sens plus ou moins fort du probl\u00e8me (P1)+(P2). Un des facteurs pour mesurer si un point critique de φ offre une solution suffisamment forte de (P1)+(P2) est de d\u00e9terminer dans quel sens la condition Dirichlet-p\u00e9riodique est satisfaite. On voudrait que le domaine Ω_T soit suffisamment r\u00e9gulier pour que la trace sur $\partial\Omega_T$ des fonctions $u \in W^{1,p}(\Omega_T)$ soit bien d\u00e9finie et continue et aboutisse dans un espace de fonctions mesurables plut\u00f4t que un espace form\u00e9 d'objets plus abstrait. On voudrait \u00e9galement d\u00e9finir des conditions sur la fonction de r\u00e9action f pour que les termes non-

lin\u00e9aires $f \diamond u$ et $\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \diamond u \right] v$ aient des traces convenables sur $\partial\Omega_T$. On va \u00e9tudier ces

questions dans les deux prochaines sections.

2.2 Régularité de Ω , théorie des traces et caractérisation de $W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$.

Dans cette section, nous étudierons l'égalité pouvant exister entre l'espace

$$H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T) = \overline{D_T(\Omega_T)}^{W^{1,p}}$$

$$\text{et l'espace } W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T) = \left\{ u \in W^{1,p} : \begin{array}{l} \text{Trace}[u : [0, T] \times \partial\Omega] = 0, \\ \text{Trace}[u : \{0\} \times \partial\Omega] = \text{Trace}[u : \{T\} \times \partial\Omega] \end{array} \right\}.$$

On montrera que si Ω est borné et que $\partial\Omega$ satisfait une condition de régularité lipschitzienne alors les $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$ satisfont la condition Dirichlet-périodique dans un sens de plus en plus fort quand la valeur de p croit. En particulier, on montrera que pour $p \geq 2$ la condition Dirichlet à 0 est satisfaite par $\text{Trace}[u : \{t\} \times \partial\Omega] \forall t \in [0, T]$.

Définition 2.2.1

1. Deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) sont dits L-homéomorphes s'il existe un homéomorphisme $h : X \rightarrow Y$ tel que h et h^{-1} sont lipschitziennes.
2. Un ouvert borné $\Omega \subset R^n$ sera dit L-régulier s'il existe des ouverts A_1, \dots, A_m et des L-homéomorphismes $\alpha_r : I_N \rightarrow A_r$ ($r = 1, \dots, m$) tels que

$$\begin{aligned} \alpha_r(I_{N-1} \times]-1, 0]) &\subset \Omega, \\ \alpha_r(I_{N-1} \times \{0\}) &\subset \partial\Omega, \\ \alpha_r(I_{N-1} \times]0, 1]) &\subset R^N \setminus \overline{\Omega} \end{aligned} \quad (59)$$

et

$$\bigcup_{r=1}^m \alpha_r(I_{N-1} \times \{0\}) = \partial\Omega. \quad (60)$$

3. On dit d'un L-homéomorphisme satisfaisant (59) qu'il sépare bien l'intérieur et l'extérieur de Ω .
4. Nous utiliserons les notations suivantes pour le reste de cette thèse :

$$I_N^- = I_{N-1} \times]-1, 0[, \quad I_N^0 = I_{N-1} \times \{0\}, \quad I_N^+ = I_{N-1} \times]0, 1[; \quad (61)$$

$$A_r^- = \alpha_r(I_N^-), \quad A_r^0 = \alpha_r(I_N^0), \quad A_r^+ = \alpha_r(I_N^+). \quad (62)$$

5. Un ensemble fini $\{(\alpha_r, A_r) : r = 1, \dots, m\}$ respectant (59) et (60) sera appelé un L-recouvrement de $\partial\Omega$.

□

Si Ω est un domaine borné et L-régulier alors un théorème classique permet de définir la restriction à $\partial\Omega$ des fonctions $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Nous allons citer ce théorème classique puis nous démontrerons que si Ω est L-régulier alors Ω_T l'est également.

Théorème 2.2.2

Soient $p \in]1, \infty[$ et $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné et L-régulier.

Alors il existe un opérateur linéaire continue et surjectif $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ tel que

$$T[u] = u|_{\partial\Omega} \quad \forall u \in C^\infty(\overline{\Omega}) . \quad \square$$

Il existe plusieurs définitions des espaces de Sobolev pour des degrés de différentiabilité s non entiers. Ces définitions sont plus ou moins équivalentes selon la régularité du domaine Ω . Voici donc les définitions que nous utilisons dans cette thèse.

Définition 2.2.3

1. Soient un ouvert borné $\Omega \subset R^N$, des constantes $\theta \in]0, 1[$, $p \in]1, \infty[$ et une fonction $u : \Omega \rightarrow R$. On pose

$$Var_{\theta,p,N}[u](x,y) = \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^{\theta + N/p}} .$$

La fonction $Var_{\theta,p,N}[u]$ sera appelée la variation d'indice (θ, p, N) de u .

2. Pour $\theta \in]0, 1[$ on pose

$$W^{\theta,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \|Var_{\theta,p,N}[u]\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} < \infty \right\}$$

et on munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{W^{\theta,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|Var_{\theta,p,N}[u]\|_{L^p(\Omega \times \Omega)}.$$

3. Pour $k \geq 0$ entier, $\theta \in]0,1[$ et $s = k + \theta$, on pose

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : \sum_{|\beta|=k} \|Var_{\theta,p,N}[\partial^\beta u]\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} < \infty \right\}$$

et on munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\beta| \leq k} \|\partial^\beta u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\beta|=k} \|Var_{\theta,p,N}[u]\|_{L^p(\Omega \times \Omega)}.$$

4. Si Ω est L-régulier et $\{(\alpha_r, A_r) : r = 1, \dots, m\}$ est un L-recouvrement de Ω alors on pose

$$W^{\theta,p}(\partial\Omega) = \{u \in L^p(\partial\Omega) : u \circ \alpha_r(\cdot, 0) \in W^{\theta,p}(I_{N-1})\}$$

et on munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{W^{\theta,p}(\partial\Omega)} = \sum_{r=1}^m \|u \circ \alpha_r(\cdot, 0)\|_{W^{\theta,p}(I_{N-1})}$$

5. Si $\partial\Omega$ possède un L-recouvrement $\{(\alpha_r, A_r) : r = 1, \dots, m\}$ tel que les α_r sont des difféomorphismes d'ordre $k+1$. Alors on pose

$$W^{s,p}(\partial\Omega) = \{u \in L^p(\partial\Omega) : u \circ \alpha_r(\cdot, 0) \in W^{s,p}(I_{N-1}) \text{ pour } r = 1, \dots, m\}$$

et on munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\partial\Omega)} = \sum_{r=1}^m \|u \circ \alpha_r(\cdot, 0)\|_{W^{s,p}(I_{N-1})}. \square$$

Remarque 2.2.4

La définition des espaces $W^{s,p}(\partial\Omega)$ semble dépendre de la famille de couples $\{(\alpha_r, A_r)\}$ choisie pour recouvrir $\partial\Omega$. En fait, il a été montré que différents recouvrements induisent des normes équivalentes. (Voir Lions et Magenes [11])

Nous voulons maintenant montrer que si Ω est L-régulier dans R^N alors Ω_τ est L-régulier dans R^{N+1} . Auparavant on a besoin d'un petit lemme.

Lemme 2.2.5

Soient $J_2^- = \{(x, y) \in I_2 : \max(x, 2|y| - 1) < 0\}$, $J_2^0 = \{(x, y) \in I_2 : \max(x, 2|y| - 1) = 0\}$,
 $J_2^+ = \{(x, y) \in I_2 : \max(x, 2|y| - 1) > 0\}$.

Alors il existe un L-homéomorphisme $H : I_2 \rightarrow I_2$ tel que

$$H(I_2^-) = J_2^-, \quad H(I_2^0) = J_2^0, \quad H(I_2^+) = J_2^+.$$

Démonstration :

Dans un premier temps, nous définissons la fonction H sur certains points du carré fermé

\bar{I}_2 . Soient les points :

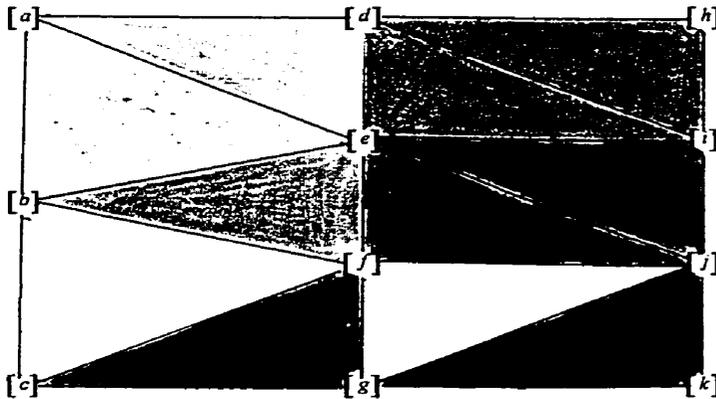
$$\begin{aligned} a &= (-1, 1), & d &= (0, 1), & h &= (1, 1), \\ b &= (-1, 0), & e &= (0, \frac{1}{3}), & i &= (1, \frac{1}{3}), \\ c &= (-1, -1), & f &= (0, -\frac{1}{3}), & j &= (1, -\frac{1}{3}), \\ & & g &= (0, -1), & k &= (1, -1), \end{aligned}$$

et

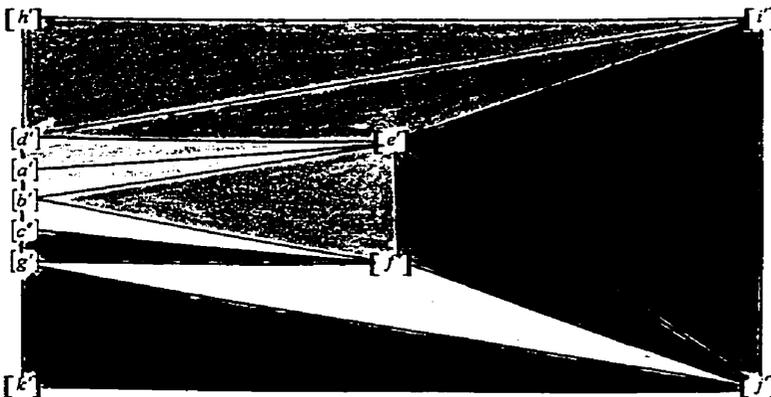
$$\begin{aligned} a' &= H(a) = (-1, \frac{1}{4}), & d' &= H(d) = (-1, \frac{1}{2}), & h' &= H(h) = (-1, 1), \\ b' &= H(b) = (-1, 0), & e' &= H(e) = (0, \frac{1}{2}), & i' &= H(i) = (1, 1), \\ c' &= H(c) = (-1, -\frac{1}{4}), & f' &= H(f) = (0, -\frac{1}{2}), & j' &= H(j) = (1, -1), \\ & & g' &= H(g) = (-1, -\frac{1}{2}), & k' &= H(k) = (-1, -1). \end{aligned}$$

Dans un deuxième temps nous utilisons les deux ensembles de points $\{a, \dots, k\}$ et $\{a', \dots, k'\}$ pour définir deux triangulations C_1 et C_2 du carré fermé \bar{I}_2 . Ces triangulations sont décrites ci-dessous :

Triangulation C_1



triangulation C_2



On remarque que ces deux triangulations sont équivalentes dans le sens suivant : le triangle $T(s_1, s_2, s_3)$ appartient à la triangulation C_1 ssi le triangle $T(s'_1, s'_2, s'_3) = T(H(s_1), H(s_2), H(s_3))$ appartient à la triangulation C_2 .

On définit la fonction H sur chaque triangle fermé

$$\bar{T}(s_1, s_2, s_3) = \{\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \lambda_3 s_3 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

de la triangulation C_1 , par la formule :

$$H(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \lambda_3 s_3) = \lambda_1 s'_1 + \lambda_2 s'_2 + \lambda_3 s'_3.$$

Evidemment, la fonction inverse H^{-1} est alors donnée sur chaque triangle fermé de la triangulation C_2 , par la formule

$$H^{-1}(\lambda_1 s'_1 + \lambda_2 s'_2 + \lambda_3 s'_3) = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \lambda_3 s_3$$

pour $\lambda_1 s'_1 + \lambda_2 s'_2 + \lambda_3 s'_3 \in \bar{T}(s'_1, s'_2, s'_3) \in \{\text{triangles fermés de } C_2\}$.

Les fonctions H et H^{-1} sont continue et linéaires par morceaux. Comme le nombre de morceaux linéaires est fini H et H^{-1} sont lipschitziennes. \square

Théorème 2.2.6

Si Ω est un ensemble L-régulier dans R^N alors $]0, T[\times \Omega$ est L-régulier dans R^{N+1} .

Démonstration :

Soit $\{(\alpha_r, A_r) : r = 1, \dots, m\}$ un L-recouvrement de $\partial\Omega$. Considérons le compact

$K \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \setminus \bigcup_{r=1}^m A_r$. On peut supposer, sans perte de généralité que K n'est pas vide. En effet,

si K est vide il suffit de remplacer les ouverts A_r par $\hat{A}_r = \alpha_r(I_{N-1} \times]-\varepsilon, \varepsilon[)$ pour un $\varepsilon > 0$

suffisamment petit et de remplacer les α_r par des $\hat{\alpha}_r : I_N \rightarrow \hat{A}_r$ définies par

$$\hat{\alpha}_r(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) = \alpha_r(x_1, \dots, x_{N-1}, \varepsilon x_N).$$

Donc on a que K est un compact non vide dans Ω et il existe un recouvrement fini $\{B_s : s = 1, \dots, n\}$ de K par des cubes ouverts dont les fermetures (dans R^N) sont incluses dans Ω .

Considérons le recouvrement ouvert suivant de $\partial(\Omega_T)$ dans R^{N+1} :

$$F = \left\{ \left] -\frac{T}{4}, \frac{T}{4} \right[\times B_s : 1 \leq s \leq n \right\} \cup \left\{ \left] \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4} \right[\times B_s : 1 \leq s \leq n \right\} \cup \left\{ \left] -\frac{T}{2}, \frac{3T}{2} \right[\times A_r : 1 \leq r \leq m \right\}.$$

Il nous faut prouver que pour chaque membre U de F , il existe un L-homéomorphisme $I_{N+1} \rightarrow U$ qui sépare bien l'intérieur et l'extérieur de Ω_T . Pour $s \in \{1, \dots, n\}$, il existe

évidemment une bijection linéaire affine $b_s : I_N \rightarrow B_s$ et alors les transformations :

$$c_s : I_{N+1} \rightarrow \left] -\frac{T}{4}, \frac{T}{4} \right[\times B_s : (x_1, \dots, x_{N+1}) \mapsto \left(\frac{T}{4} x_1, b_s(x_2, \dots, x_{N+1}) \right)$$

et

$$d_s : I_{N+1} \rightarrow \left] \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4} \right[\times B_s : (x_1, \dots, x_{N+1}) \mapsto \left(\frac{T}{4}(4 - x_1), b_s(x_2, \dots, x_{N+1}) \right)$$

séparent bien l'intérieur et l'extérieur de Ω_T et atteignent les $\left] -\frac{T}{4}, \frac{T}{4} \right[\times B_s$ et les

$\left] \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4} \right[\times B_s$, ($s=1, \dots, n$) du recouvrement F . Comme les c_s, d_s sont des bijections linéaires affines (avec des domaines de dimension finie) ce sont évidemment des L-homéomorphismes.

Il nous reste à trouver des L-homéomorphismes convenables pour les

$\left] \frac{T}{2}, \frac{3T}{2} \right[\times A_r$ ($r=1, \dots, m$). Si on définit les fonctions

$$e_r : I_{N+1} \rightarrow \left] \frac{T}{2}, \frac{3T}{2} \right[\times A_r : (x_1, \dots, x_{N+1}) \mapsto \left(Tx_1 + \frac{T}{2}, \alpha_r(x_2, \dots, x_{N+1}) \right)$$

pour $r=1, \dots, m$ alors on définit bien des L-homéomorphismes, toutefois ces L-homéomorphismes ne séparent pas bien l'intérieur et l'extérieur de Ω_T . En effet :

$$\begin{aligned} x \in e_r^{-1}(\left] 0, T \right[\times \Omega) &\Leftrightarrow (Tx_1 + T/2 \in \left] 0, T \right[) \text{ et } (\alpha_r(x_2, \dots, x_{N+1}) \in \Omega), \\ &\Leftrightarrow (|x_1| < 1/2) \text{ et } (x_{N+1} < 0), \\ &\Leftrightarrow \max(2|x_1| - 1, x_{N+1}) < 0. \end{aligned}$$

Des raisonnements semblables montrent que

$$x \in e_r^{-1}(R^{N+1} \setminus \left] 0, T \right[\times \bar{\Omega}) \Leftrightarrow \max(2|x_1| - 1, x_{N+1}) > 0$$

et que

$$x \in e_r^{-1}(\partial \left] 0, T \right[\times \Omega) \Leftrightarrow \max(2|x_1| - 1, x_{N+1}) = 0.$$

Toutefois si $H = (H_1, H_2) : I_2 \rightarrow I_2$ est un L-homéomorphisme satisfaisant les conditions

du lemme 2.2.5, alors la fonction $\hat{e}_r : I_{N+1} \rightarrow \left] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right[\times A_r$ définie par

$$\hat{e}_r(x_1, \dots, x_{N+1}) = e_r \left(\left[H^{-1} \right]_1(x_1, x_{N+1}), x_2, \dots, x_N, \left[H^{-1} \right]_2(x_1, x_{N+1}) \right)$$

est un L-homéomorphisme séparant bien l'intérieur et l'extérieur de $\left] 0, T \right[\times \Omega$. \square

Avant d'énoncer et démontrer le résultat d'équivalence entre $W_{T_0}^{1,p}$ et $H_{T_0}^{1,p}$ nous aurons besoin de résultats permettant de "coller" côte à côte des fonctions de Sobolev définies sur des domaines adjacents si les traces satisfont certaines conditions.

Lemme 2.2.7

Soient $p \in]1, \infty[$, $q = p/(p-1)$ et $A \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert.

Soient des fonctions $u \in W^{1,p}]a, b[\times A$ et $v \in W^{1,p}]b, c[\times A$ telles que

$$\text{Trace}[u : \{b\} \times A] = \text{Trace}[v : \{b\} \times A]. \quad (63)$$

Soit finalement la fonction $w :]a, c[\times A \rightarrow \mathbb{R}$ définie presque partout par :

$$w(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & \text{si } t \in]a, b[, \\ v(t, x) & \text{si } t \in]b, c[. \end{cases} \quad (64)$$

Alors $w \in W^{1,p}]a, c[\times A$.

Démonstration :

Il nous faut montrer que le gradient au sens des distributions de w est identifiable à un élément de $L^p]a, c[\times A; \mathbb{R}^{N-1}$. Cet élément pourrait bien être la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} w(t, x) &= (\tilde{\partial}_0 w(t, x), \dots, \tilde{\partial}_N w(t, x)) \\ &= \begin{cases} \nabla u(t, x) & \text{si } t \in]a, b[, \\ \nabla v(t, x) & \text{si } t \in]b, c[. \end{cases} \end{aligned} \quad (65)$$

On prend donc $\phi \in D]a, c[\times A$ et on va démontrer que

$$\int_{]a, c[\times A} [\partial_i \phi(t, x)] w(t, x) d(t, x) = - \int_{]a, c[\times A} \phi(t, x) \tilde{\partial}_i w(t, x) d(t, x). \quad (66)$$

Pour démontrer ce résultat on va utiliser des approximations de ϕ dans $W^{1,q}]a, c[\times A$ et dans $D]a, c[\times A$ et effectuer un certain nombre de passages à la limite.

Étape 1 :

Pour $0 < \varepsilon < \min(c-b, b-a)$ on définit

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]a, b-\varepsilon[\cup]b-\varepsilon, c[, \\ \varepsilon^{-1}|t-b| & \text{si } t \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon]; \end{cases} \quad (67)$$

$$\phi_\varepsilon(t, x) = f_\varepsilon(t) \phi(t, x) \quad \forall (t, x) \in]a, c[\times A. \quad (68)$$

Nous avons alors l'égalité suivante :

$$\int_{]a, c[\times A} [\partial_i \phi_\varepsilon(t, x)] w(t, x) d(t, x) = - \int_{]a, c[\times A} \phi_\varepsilon(t, x) \tilde{\partial}_i w(t, x) d(t, x). \quad (69)$$

En effet, soient

$\psi \in D[-1,1[$ une densité de probabilité;

$$\psi_\delta(t) = \begin{cases} \delta^{-1}\psi(\delta^{-1}t) & \text{si } |t| \leq \delta, \\ 0 & \text{si } \delta \leq |t| \leq 1, \end{cases} \quad \forall \delta > 0;$$

$$\hat{f}_{\varepsilon,\delta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t-b| \leq 2\delta, \\ 1 & \text{si } \varepsilon + 2\delta \leq |t-b| < \infty, \\ \varepsilon^{-1}(|t-b| - 2\delta) & \text{si } 2\delta \leq |t-b| \leq 2\delta + \varepsilon, \end{cases} \quad \forall \varepsilon, \delta > 0;$$

$$f_{\varepsilon,\delta} = \psi_\delta * f_{\varepsilon,\delta} \quad \forall \varepsilon, \delta > 0;$$

$$\phi_{\varepsilon,\delta}(t, x) = f_{\varepsilon,\delta}(t)\phi(t, x) \quad \forall (t, x) \in]a, c[\times A.$$

On vérifie facilement que :

$$\phi_{\varepsilon,\delta}|_{]a,b[\times A} \in D(a, b[\times A), \quad \phi_{\varepsilon,\delta}|_{]b,c[\times A} \in D(b, c[\times A) \quad (70)$$

et que

$$\phi_{\varepsilon,\delta}|_{]a,b[\times A} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \phi_\varepsilon|_{]a,b[\times A} \text{ dans } \mathcal{W}^{1,q}(a, b[\times A), \quad (71)$$

$$\phi_{\varepsilon,\delta}|_{]b,c[\times A} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \phi_\varepsilon|_{]b,c[\times A} \text{ dans } \mathcal{W}^{1,q}(b, c[\times A). \quad (72)$$

Par (70), on peut alors écrire :

$$\int_{]a,b[\times A} [\partial_i \phi_{\varepsilon,\delta}(t, x)] u(t, x) d(t, x) = - \int_{]a,b[\times A} \phi_{\varepsilon,\delta}(t, x) \partial_i u(t, x) d(t, x), \quad (73)$$

$$\int_{]b,c[\times A} [\partial_i \phi_{\varepsilon,\delta}(t, x)] v(t, x) d(t, x) = - \int_{]b,c[\times A} \phi_{\varepsilon,\delta}(t, x) \partial_i v(t, x) d(t, x). \quad (74)$$

Si on fait tendre δ vers 0^+ dans les équations (73) et (74), alors par (71) et (72) et l'inégalité de Hölder on a le droit de faire entrer les limites à l'intérieur de l'intégrale. L'équation (69) est la somme de ces deux équations limites.

Étape 2 :

Dans cette étape nous allons obtenir (66) à partir de (69) en faisant tendre ε vers 0^+ . Si on étudie le membre de droite de (69) on s'aperçoit que les fonctions $|\phi_\varepsilon \tilde{\partial}_i w| = f_\varepsilon |\phi| |\tilde{\partial}_i w|$ sont dominées par $|\phi| |\tilde{\partial}_i w|$ dans L^1 car $0 \leq f_\varepsilon \leq 1$. Le théorème de convergence dominée nous donne alors :

$$\int_{]a,c[\times A} \phi_\varepsilon(t,x) \tilde{\partial}_i w(t,x) d(t,x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{]a,c[\times A} \phi(t,x) \tilde{\partial}_i w(t,x) d(t,x). \quad (75)$$

Étudions maintenant le membre de gauche de (69). Comme ϕ et ϕ_ε sont égaux sur le domaine $]a, b - \varepsilon[\cup]b + \varepsilon, c[\times A$, il suffira de vérifier que :

$$\int_{]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\times A} [\partial_i \phi_\varepsilon(t,x)] w(t,x) d(t,x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, N. \quad (76)$$

Le calcul des dérivées partielles de ϕ_ε , nous donne les formules suivantes :

$$\partial_0 \phi_\varepsilon(t,x) = \varepsilon^{-1} \text{signe}(t-b) \phi(t,x) + f_\varepsilon(t) \partial_0 \phi(t,x) \quad 0 < |t-b| < \varepsilon, \quad x \in A; \quad (77)$$

$$\partial_i \phi_\varepsilon(t,x) = f_\varepsilon(t) \partial_i \phi(t,x) \quad i = 1, \dots, N, \quad 0 < |t-b| < \varepsilon, \quad x \in A. \quad (78)$$

Pour $i = 1, \dots, N$, (76) découle du théorème de convergence dominée appliqué à la fonction $|w \partial_i \phi_\varepsilon| \chi_{]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\times A} \leq |w \partial_i \phi|$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Pour $i=0$, le théorème de convergence dominée nous donne tout d'abord que :

$$\int_{]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\times A} |w(t,x) f_\varepsilon(t) \partial_0 \phi(t,x)| d(t,x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0. \quad (79)$$

On a d'autre part le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_{]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\times A} \varepsilon^{-1} w(t,x) \text{signe}(t-b) \phi(t,x) d(t,x) &= \begin{cases} \int_{]b, b+\varepsilon[\times A} \varepsilon^{-1} v(t,x) \phi(t,x) d(t,x) \\ - \int_{]b-\varepsilon, b[\times A} \varepsilon^{-1} u(t,x) \phi(t,x) d(t,x) \end{cases} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_A \phi(b,x) \{ \text{Trace}[v : \{t=b\}](x) - \text{Trace}[u : \{t=b\}](x) \} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

En combinant (77), (79) et le calcul ci-dessus on a (76) pour $i=0$. \square

Lemme 2.2.8

Soient $p \in]1, \infty[$ et $q = p/(p-1)$.

Soit $u \in W^{1,p}([0, T] \times I_N)$ telle que :

$$\text{Trace}[u : \{0\} \times I_N] = \text{Trace}[u : \{T\} \times I_N], \quad (80)$$

$$u|_{[0, T] \times I_N} = 0, \quad (81)$$

et telle qu'il existe un compact $K \subset I_N$ pour lequel

$$u|_{[0,T] \times (I_N \setminus K)} = 0. \quad (82)$$

Alors il existe $u_k \in D_T([0, T] \times I_N)$, $K_k \subset I_N$ compacts ($k = 1, 2, \dots$) tels que

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \text{ dans } W^{1,p}([0, T] \times I_N), \quad (83)$$

$$u_k|_{[0,T] \times (I_N \setminus K_k)} = 0. \quad (84)$$

Démonstration :

Considérons le prolongement périodique de u par rapport à la variable t . Posons

$$\hat{u}(t, x) = u(t - rT, x) \quad \forall (t, x) \in [rT, (r+1)T] \times I_N, \quad \forall r \in \mathbb{Z}. \quad (85)$$

Par le lemme 2.2.7, on a que

$$\hat{u} \in W_{loc}^{1,p}(R \times I_N). \quad (86)$$

Prolongeons \hat{u} à R^{N-1} . On pose

$$\tilde{u}(t, x) = \begin{cases} u(t, x) & \text{si } x \in I_N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On va fabriquer la suite $\{u_k\}$ en convoluant \tilde{u} avec des fonctions régularisantes bien choisies. Soient :

- $\delta = \text{distance}(K, \partial I_N)$,
- une suite $\{\varepsilon(k)\} \subset]0, \delta/6[$ telle que $\varepsilon(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$,
- $\phi \in D(3B)$ une fonction régularisante dont le support est inclus dans la boule

$$B - 2(0, e_N) = \{(t, x_1, \dots, x_N) \in R^{N+1} : \|(t, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N + 2)\| < 1\}, \quad (87)$$

- $\phi_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-N-1} \phi(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon^{-1}x) \quad \forall (t, x) \in R^{N+1}, \forall \varepsilon > 0$,

- $\tilde{u}_k = \phi_{\varepsilon(k)} * \tilde{u} \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (88)$

- $u_k = \tilde{u}_k|_{[0,T] \times I_N} \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (89)$

Il est clair que la suite $\{\tilde{u}_k\}$ converge vers \tilde{u} dans $W_{loc}^{1,p}(R^{N-1})$ et que (83) est vraie.

Vérifions que $u_k \in D_T([0, T] \times I_N)$. Par construction la fonction \tilde{u} est T-périodique selon la variable t et on a :

$$\partial^\beta u_k(0, x) = \partial^\beta \tilde{u}_k(0, x) = \partial^\beta \tilde{u}_k(T, x) = \partial^\beta u_k(T, x) \quad \forall x \in I_N, \forall \text{ multi - indice } \beta. \quad (90)$$

Si on montre l'existence d'un compact $K_k \subset I_N^+$ satisfaisant (84) on terminera en même temps la preuve que $\{u_k\} \subset D_T([0, T] \times I_N)$. Posons

$$K_k = [-1 + \varepsilon(k), 1 - \varepsilon(k)]^{N-1} \times [\varepsilon(k), 1 - \varepsilon(k)]. \quad (91)$$

Nous devons montrer que u_k est nulle sur $[0, T] \times (I_N \setminus K_k)$. L'équivalence logique suivante nous servira à définir différents cas pour $I_N \setminus K_k$.

$$x \in I_N \setminus K_k \Leftrightarrow \begin{cases} (\exists 1 \leq i \leq N-1 \text{ t.q. } 0 < 1 - |x_i| < \varepsilon(k)) \\ \text{ou} & (0 < 1 - x_N < \varepsilon(k)) \\ \text{ou} & (-1 < x_N < \varepsilon(k)) \end{cases} \quad (92)$$

Soit $(t, x) \in [0, T] \times (I_N \setminus K_k)$. Faisons le calcul de $u_k(t, x)$ pour chacun des cas donnés au membre de droite de (92).

Cas 1 : $-1 < x_N < \varepsilon(k)$.

On a

$$u_k(t, x) = \int_{\varepsilon(k)B + (0, 2\varepsilon(k)e_N)} \phi_\varepsilon(s, y) \tilde{u}(t-s, x-y) \mathcal{A}(s, y).$$

Mais cette intégrale vaut zéro, car le terme $\tilde{u}(t-s, x-y)$ est nul partout sur le domaine d'intégration comme le montre le raisonnement ci-dessous.

$$\begin{aligned} x_N < \varepsilon(k) \text{ et } (s, y) \in \varepsilon(k)B + (0, 2\varepsilon(k)e_N) &\Rightarrow x_N < \varepsilon(k) \text{ et } y_N \in]\varepsilon(k), 3\varepsilon(k)[\\ &\Rightarrow x_N - y_N < 0 \\ &\Rightarrow \tilde{u}(t-s, x-y) = 0 \end{aligned}$$

Cas 2 : $0 < 1 - x_N < \varepsilon(k)$ ou bien $\exists 1 \leq i \leq N-1 \text{ t.q. } 0 < 1 - |x_i| < \varepsilon(k)$.

Dans ce cas, x se trouve à une distance inférieure à $\varepsilon(k)$ de l'une des faces de I_N . Il s'agit de la face $\{y_N = 1\}$ si $0 < 1 - x_N < \varepsilon(k)$, de la face $\{y_i = -1\}$ si $-1 < x_i < -1 + \varepsilon(k)$ ou de la face $\{y_i = 1\}$ si $1 - \varepsilon(k) < x_i < 1$. On alors que

$$\text{distance}(x, \partial I_N) < \varepsilon(k). \quad (93)$$

L'inégalité du triangle entraîne ensuite les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{distance}(K, x) &\geq \text{distance}(K, \partial I_N) - \text{distance}(\partial I_N, x), \\ &\geq \delta - \varepsilon(k), \\ &> 5\varepsilon(k). \end{aligned} \quad (94)$$

Il en découle que la boule dans R^N centrée en x et de rayon $3\varepsilon(k)$ n'intersecte pas le compact K . On trouve ensuite que la boule dans R^{N-1} centrée en (t,x) avec rayon $3\varepsilon(k)$ n'intersecte pas $R \times K$. Autrement dit,

$$(t, x) + 3\varepsilon(k)B \subset R \times (R^N \setminus K). \quad (95)$$

Par hypothèse $\tilde{u}(s, y)$ prend la valeur zéro si $y \notin K$. On a donc:

$$\tilde{u}|_{x+3\varepsilon(k)B} = 0. \quad (96)$$

Calculons maintenant $u_k(t, x)$.

$$\begin{aligned} u_k(t, x) &= \int_{3\varepsilon(k)B} \phi_{\varepsilon(k)}(s, y) u(t-s, x-y) d(s, y) \\ &= \int_{(t,x)+3\varepsilon(k)B} \phi_{\varepsilon(k)}(t-s, x-y) u(s, y) d(s, y) \\ &= \int 0 d(s, y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2.9

Soient $A \subset R^N$ un ouvert L-homéomorphe à I_N et $\alpha : I_N \rightarrow A$ un L-homéomorphisme. Soit également le L-homéomorphisme $\hat{\alpha} :]0, T[\times I_N \rightarrow]0, T[\times A : (t, x) \mapsto (t, \alpha(x))$. Soit finalement la fonction $v = u \circ \hat{\alpha}^{-1} \in W^{1,p}([0, T] \times A)$ où u est la fonction définie au lemme 2.2.8.

Alors il existe des fonctions $v_k \in D_T([0, T] \times A)$ et des compacts $J_k \subset A^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha(I_N^+)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) tels que :

$$v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v \quad \text{dans } W^{1,p}([0, T] \times A), \quad (97)$$

$$v_k = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times (A \setminus J_k). \quad (98)$$

Démonstration :

Étape 1 : On exhibe une première suite $\{\hat{v}_k\}$ qui a presque les propriétés requises.

Le L-homéomorphisme $\hat{\alpha} :]0, T[\times I_N \rightarrow]0, T[\times A$ induit une équivalence entre les espaces normés $W^{1,p}$ correspondants. Cette équivalence est définie comme suit :

$$\tilde{\alpha} : W^{1,p}([0, T] \times I_N) \rightarrow W^{1,p}([0, T] \times A) : u \mapsto u \circ \hat{\alpha}^{-1}. \quad (99)$$

Si on applique cette équivalence à la suite $\{u_k\}$ du lemme 2.2.7, on obtient presque la suite $\{v_k\}$ qu'il nous faut. Posons

$$\hat{v}_k = u_k \circ \hat{\alpha}^{-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (100)$$

on a alors immédiatement que

$$\hat{v}_k \rightarrow v \quad \text{dans } W^{1,p}([0, T] \times A). \quad (101)$$

On a aussi que les \hat{v}_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) sont des fonctions continues et lipschitziennes car la composition de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.

Vérifions qu'il existe des compacts $\hat{J}_k \subset A^+$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) tels que :

$$\hat{v}_k(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times (A \setminus \hat{J}_k). \quad (102)$$

En prenant les images, $\hat{J}_k = \alpha(K_k)$, des compacts du lemme 2.2.7 on satisfait (102). En effet, si $(t, x) \in [0, T] \times (A \setminus \hat{J}_k)$ alors $\hat{\alpha}^{-1}(t, x) = (t, \alpha^{-1}(x)) \in [0, T] \times (I_N \setminus K_k)$ et on a

$\hat{v}_k(t, x) = u_k(t, \alpha^{-1}(x)) = 0$. Les \hat{J}_k sont évidemment compacts car ce sont les images de compacts par une fonction continue.

Ce qui manque à la suite $\{\hat{v}_k\}$ c'est qu'elle n'est pas nécessairement incluse dans $D_T([0, T] \times A)$. En particulier, la composition avec le L-homéomorphisme $\hat{\alpha}^{-1}$ risque fort d'avoir fait disparaître la régularité C^∞ que possède les u_k .

Étape 2 : On régularise la suite $\{\hat{v}_k\}$.

On prolonge les fonctions \hat{v}_k à R^{N+1} . Pour ce faire on observe tout d'abord que

$$\hat{v}_k(0, x) = u_k(0, \alpha^{-1}(x)) = u_k(T, \alpha^{-1}(x)) = \hat{v}_k(T, x) \quad \forall x \in A, \quad (103)$$

car $u_k \in D_T([0, T] \times A)$.

Grâce au lemme 2.2.7 le prolongement défini par :

$$\tilde{v}_k(t, x) = \hat{v}_k(t - rT, x) \quad \forall (t, x) \in [rT, (r+1)T] \times A, \forall r \in Z, \quad (104)$$

appartient donc à $W_{loc}^{1,p}(R \times A)$.

Par (102) le prolongement de \tilde{v}_k et \hat{v}_k défini par

$$\tilde{v}_k(t, x) = \begin{cases} \tilde{v}_k(t, x) & \text{si } (t, x) \in R \times A, \\ 0 & \text{si } (t, x) \in R \times (R^N \setminus A), \end{cases} \quad (105)$$

appartient à $W_{loc}^{1,p}(R^{N+1})$.

On va maintenant lisser les fonctions \tilde{v}_k afin de définir la suite $\{v_k\}$. Soient

- $\rho(k) = \text{distance}(\hat{J}_k, \partial A^+)$,
- $\phi \in D(B)$ une densité de probabilité,
- $\phi_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-N-1} \phi(\varepsilon^{-1}t, \varepsilon^{-1}x) \quad \forall (t, x) \in R^{N+1}$.

On peut trouver pour chaque $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ un

$$\varepsilon(k) \in]0, \rho(k)/2[\quad (106)$$

tel que

$$\|v_k - \phi_{\varepsilon(k)} * \tilde{v}_k\|_{W^{1,p}([0,T] \times A)} = \|\tilde{v}_k - \phi_{\varepsilon(k)} * \tilde{v}_k\|_{W^{1,p}([0,T] \times A)} \langle k^{-1}. \quad (107)$$

Par (101), (107) et l'inégalité du triangle, on a :

$$v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v \quad \text{dans } W^{1,p}([0, T] \times A).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier l'existence de compacts $J_k \subset A^+$ tels que v_k s'annule sur $[0, T] \times (A \setminus J_k)$ pour $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$. On pose :

$$J_k = \{x \in A^+ : \text{distance}(x, \partial A^+) \geq \rho(k)/2\}. \quad (108)$$

On vérifie que J_k est compact en montrant qu'il est borné et fermé dans R^N .

- J_k est borné car

$$\begin{aligned} \text{diamètre}(J_k) &\leq \text{diamètre}(A^+) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in A^+\} \\ &= \sup\{\|\alpha(x) - \alpha(y)\| : x, y \in I_N^+\} \leq c_\alpha \text{diamètre}(I_N^+) \end{aligned}$$

où $c_\alpha > 0$ est la constante de Lipschitz de α .

- J_k est fermé dans R^N car son complément

$$R^N \setminus J_k = \{x \in R^N : \text{distance}(x, \partial A^+) < \rho(k)/2\} \cup (R^N \setminus \bar{A}^-)$$

est l'union de deux ouverts.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $u_k(t, x) = 0$ si $x \notin J_k$.

Soit $(t, x) \in [0, T] \times (A \setminus J_k)$, on a que :

$$v_k(t, x) = \int_{\varepsilon(k)B} \phi_{\varepsilon(k)}(s, y) \tilde{v}_k(t-s, x-y) d(s, y). \quad (109)$$

Si on montre que le facteur $\tilde{v}_k(t-s, x-y)$ est nul partout dans le domaine d'intégration alors (98) sera vérifiée et la démonstration sera terminée. Nous avons la décomposition suivante de l'ensemble $A \setminus J_k$:

$$A \setminus J_k = \{z \in A^- : \text{distance}(z, A^+) \geq \varepsilon(k)\} \cup \{z \in A : \text{distance}(z, \partial A^+) < \varepsilon(k)\}. \quad (110)$$

Nous allons calculer que $\tilde{v}_k(t-s, x-y) = 0$ en distinguant les deux cas décrits par (110).

Cas 1 : $x \in A^-$ et $\text{distance}(x, A^+) \geq \varepsilon(k)$.

On a les déductions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{distance}(x, A^+) \geq \varepsilon(k) \text{ et } x \notin A^+ &\Rightarrow (x + \varepsilon(k)B) \cap A^+ \text{ est vide,} \\ &\Rightarrow x - y \notin A^-, \\ &\Rightarrow \tilde{v}_k(t-s, x-y) = 0. \end{aligned}$$

Cas 2 : $x \in A$ et $\text{distance}(x, \partial A^+) < \varepsilon(k)$.

On a les déductions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{distance}(x, \partial A^+) < \varepsilon(k) \text{ et } y \in \varepsilon(k)B &\Rightarrow \text{distance}(x-y, \partial A^+) < 2\varepsilon(k), \\ &\Rightarrow \text{distance}(x-y, \partial A^+) < \rho(k), \\ &\Rightarrow x-y \in \tilde{J}_k, \\ &\Rightarrow \tilde{v}(t-s, y-x) = 0. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.10

Supposons que $\Omega \subset R^N$ est un ouvert borné et L-régulier. Alors les énoncés suivants sont vrais.

- Pour $p \in [1, \infty[$ on a :

$$H_{T0}^{1,p}(\Omega_T) = W_{T0}^{1,p}(\Omega_T) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega_T) : \begin{aligned} \text{Trace}[u : [0, T] \times \partial\Omega] &= 0 \text{ dans } L^p, \\ \text{Trace}[u : \{0\} \times \Omega] &= \text{Trace}[u : \{T\} \times \Omega] \text{ dans } L^p(\Omega) \end{aligned} \right\}. \quad (111)$$

- Pour $p \in [2, \infty[$ on a :

$$\text{Trace}[u : \{t\} \times \partial\Omega] = 0 \text{ dans } W^{1-2/p}(\partial\Omega) \prec L^p(\partial\Omega), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (112)$$

Démonstration :

Étape 1 : Montrer que $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T) \subset W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$.

Par le théorème 2.2.6, le domaine $]0, T[\times \Omega$ est L-régulier et donc l'application $u \mapsto \text{Trace}[u : \partial\Omega_T]$ existe et est continue de $W^{1,p}(\Omega_T)$ vers $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega_T) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega_T)$.

La L-régularité de $]0, T[\times \Omega$ entraîne que $\partial\Omega_T$ possède une mesure de dimension N bien définie. Les ensembles $]0, T[\times \partial\Omega$, $\{0\} \times \Omega$, $\{T\} \times \Omega$ sont non-négligeables dans $\partial\Omega_T$ et les traces vers ces sous ensembles sont également bien définies dans les espaces L^p correspondants.

On remarque que les fonctions $u \in D_T(\Omega_T)$ satisfont automatiquement les équations :

$$\text{Trace}[u :]0, T[\times \partial\Omega] = 0 \quad (113)$$

et

$$\text{Trace}[u : \{0\} \times \Omega] = \text{Trace}[u : \{T\} \times \Omega]. \quad (114)$$

Comme $D_T(\Omega_T)$ est dense dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$ les équations (113), (114) sont satisfaites par tous les $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$ et donc $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T) \subset W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$.

Étape 2 : Montrer que $W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T) \subset H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$.

Soit $u \in W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$, on va construire une suite $\{u_k\} \subset D_T(\Omega_T)$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega_T)$. Considérons un recouvrement ouvert $\{A_0, \dots, A_m\}$ de Ω formé en combinant un L-recouvrement $\{(\alpha_r, A_r) : r = 1, \dots, m\}$ de $\partial\Omega$ avec un ouvert A_0 tel que $\Omega \setminus \bigcup_{r=1}^m A_r \subset A_0 \subset\subset \Omega$. Prenons une partition de l'unité $\{\psi_0, \dots, \psi_m\}$ de classe C^∞ pour ce recouvrement.

Posons

$$u_r(t, x) = \psi_r(x)u(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in]0, T[\times \bigcup_{r=0}^m A_r. \quad (115)$$

On a alors les résultats suivants

- $u(t, x) = \sum_{r=0}^m u_r(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \quad (116)$

- $\exists K_r$ compact dans A_r ($r = 0, \dots, m$) tel que
 $u_r = 0$ sur $[0, T] \times (A_r \setminus K_r), \quad (117)$

- pour $r \neq 0$ on a
 $u_r = 0$ sur $[0, T] \times A_r \stackrel{\text{déf}}{=} [0, T] \times \alpha_r(I_N^-). \quad (118)$

Nous allons approximer chaque u_r ($r = 0, \dots, m$) par une suite $\{u_r^k : k = 1, 2, 3, \dots\} \subset D_T([0, T] \times A_r)$ bien choisie.

- Pour $r = 1, \dots, m$, on a par le corollaire 2.2.9 qu'il existe une suite $\{u_r^k\}$ possédant les propriétés suivantes :

$$\{u_r^k : k = 1, 2, 3, \dots\} \subset D_T([0, T] \times A_r^+), \quad (119)$$

$$u_r^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_r \text{ dans } W^{1,p}([0, T] \times A_r^+). \quad (120)$$

- Pour $r = 0$, le lemme 2.2.7 nous dit que le prolongement suivant de u_0 :

$$\hat{u}_0(t, x) = u_0(t - sT, x) \quad \text{pour } (t, x) \in [sT, (s+1)T[, \quad \forall s \in \mathbb{Z};$$

appartient à $W_{loc}^{1,p}(R \times A_0)$.

En convoluant \hat{u}_0 avec des contractions ϕ_ε d'une fonction régularisante ϕ on obtient une suite $\{u_0^k : k = 1, 2, 3, \dots\}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\{u_0^k\} \subset D_T([0, T] \times A_0), \quad (121)$$

$$u_0^k \rightarrow u_0 \text{ dans } W^{1,p}([0, T] \times A_0). \quad (122)$$

En additionnant ces suites :

$$u^k = \sum_{r=0}^m u_r^k \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (123)$$

on obtient une suite satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\{u^k\} \subset D_T([0, T] \times \Omega), \quad (124)$$

$$u^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega_T). \quad (125)$$

On a donc montré que $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$.

Étape 3 : Vérifier (112) pour $p \in [2, \infty[$.

On veut montrer que pour tout $u \in W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T) = H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$, $\text{Trace}[u : \{\iota\} \times \partial\Omega]$ est une fonction (une classe de fonctions p.p. égales), plutôt qu'un objet de type plus général comme une distribution. Il nous faut ensuite montrer que $\text{Trace}[u : \{\iota\} \times \partial\Omega]$ est la fonction nulle pour tout $u \in W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$.

On va vérifier que l'opérateur de restriction $T : C^\infty(\overline{\Omega_T}) \rightarrow C(\{\iota\} \times \partial\Omega) : u \mapsto u|_{\{\iota\} \times \partial\Omega}$ possède une unique extension continue $\hat{T} : W^{1,p}(\Omega_T) \rightarrow W^{1-\frac{2}{p}}(\{\iota\} \times \partial\Omega)$. Vérifions d'abord l'unicité : supposons qu'il existe $\hat{T}_1, \hat{T}_2 : W^{1,p}(\Omega_T) \rightarrow W^{1-\frac{2}{p}}(\{\iota\} \times \partial\Omega)$ des extensions continues de T . Alors $\hat{T}_1 - \hat{T}_2 = 0$ sur le sous-espace dense $C^\infty(\overline{\Omega_T})$ ce qui entraîne que $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$ partout dans $W^{1,p}(\Omega_T)$. L'existence s'obtient par la composition de deux opérateurs. On a l'existence d'un premier opérateur de trace continu

$$\hat{T} : W^{1,p}([0, T] \times \Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p,p}}(\{\iota\} \times \Omega), \quad (126)$$

comme le degré de différentiabilité $1 - \frac{1}{p}$ de l'espace d'arrivée est supérieur à $\frac{1}{p}$ et comme Ω est un ensemble L-régulier on a un deuxième opérateur de trace

$\tilde{T} : W^{1-\frac{1}{p,p}}(\Omega) \cong W^{1-\frac{1}{p,p}}(\{\iota\} \times \Omega) \rightarrow W^{1-\frac{2}{p,p}}(\partial\Omega)$. En posant $\hat{T} = \tilde{T} \circ \hat{T}$, on a l'extension continue de T qu'on désirait.

Maintenant nous allons montrer que

$$\hat{T}(u) = 0 \quad \forall u \in W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T). \quad (127).$$

En effet, il est trivialement vrai que $\hat{T}(u) = 0$ pour les $u \in D_T(\Omega_T)$. Les étapes 1 et 2 de cette démonstration ont montré que sous les hypothèses présentes

$W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T) = H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{D_T(\Omega_T)}$. On obtient alors (127) par la densité de $D_T(\Omega_T)$ dans $W_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$. \square

2.3 Condition Dirichlet-périodique et opérateur de substitution.

Dans cette section, nous chercherons des conditions suffisantes pour que le terme non-linéaire $\mathcal{J}u$ apparaissant dans le problème (P1) appartienne à $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ si u appartient à ce même espace. Nous avons tout d'abord la proposition suivante.

Proposition 2.3.1

Soient $p \in [1, \infty[$ et $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné.

Soit une fonction $v \in C([0, T] \times \overline{\Omega}; R^M) \cap C^1(]0, T[\times \Omega; R^M)$ telle que :

$$v \in L^p(\Omega_T; R^M), \quad (128)$$

$$\partial_i v_j \in L^p(\Omega_T; R) \quad \forall (i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}, \quad (129)$$

$$v(0, x) = v(T, x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (130)$$

$$v(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (131)$$

Alors

$$v \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M). \quad (132)$$

Remarque 2.3.2

Le lecteur a sans doute remarqué qu'on n'a pas fait d'hypothèse de régularité sur la frontière de Ω . On ne peut donc compter sur l'existence d'une trace sur $\partial(\Omega_T)$ des fonctions $u \in W^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ pour justifier les conditions (130) et (131). La démonstration de la proposition 2.3.1 avec les lemmes techniques qui la précèdent sera donc donnée à la fin de la section afin de ne pas perdre de vue l'objectif principal de la section. Les trois prochains théorèmes donnent donc des conditions suffisantes pour que la composition tordue $\mathcal{J}u$ préserve l'appartenance à $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ pour différents cas de valeurs de p .

Théorème 2.3.3

Soit $p \in [1, N + 1[$.

Supposons que le domaine Ω_T et la fonction d'interaction f satisfont les conditions ci-après.

- Ω est un ouvert borné dans R^M . (133)

- $f \in C([0, T] \times \overline{\Omega} \times R^M; R^M) \cap C^1(]0, T[\times \Omega \times R^M; R^M)$. (134)

- $f(0, x, y) = f(T, x, y) \quad (\forall (x, y) \in \Omega \times R^M)$. (135)

- $f(t, x, 0) = 0 \quad (\forall (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega)$. (136)

- $\exists C_1 \in]0, \infty[$, $\exists C_2 \in L^1(\Omega_T; R)$ tels que

$$\|f(t, x, y)\|^p \leq C_1 \|y\|^{\frac{(N-1)p}{N-1-p}} + C_2(t, x) \quad (137)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

- $\exists C_3 \in]0, \infty[$, $\exists C_4 \in L^1(\Omega_T; R)$ tels que

$$\|\partial_i f(t, x, y)\|^p \leq C_3 \|y\|^{\frac{(N-1)p}{N-1-p}} + C_4(t, x) \quad (138)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$, $i \in \{0, \dots, N\}$.

- $C_5 \in]0, \infty[$ tel que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) \right\| \leq C_5 \quad (\forall (\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) \in \Omega_T \times R^M). \quad (139)$$

Alors

- $f \circ u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \quad (\forall u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M))$, (140)

- l'application $\hat{f} : H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \rightarrow H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) : u \mapsto f \circ u$ est continue selon la topologie de la norme,

- les dérivées partielles sont données par la règle de la chaîne, c'est à dire :

$$\partial_i (f_j \circ u) = (\partial_i f_j) \circ u + \left\langle (\nabla_y f_j) \circ u, \partial_i u \right\rangle_{R^M} \quad (141)$$

pour $i = 0, \dots, N$ et $j = 1, \dots, M$.

Démonstration :

Étape 1 : Montrer que $\mathcal{F}u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ pour les $u \in D_T(\Omega_T; R^M)$.

Soit $u \in D_T(\Omega_T; R^M)$. Afin d'utiliser la proposition 2.3.1, on va d'abord vérifier les affirmations ci-après.

$$\bullet \quad \mathcal{F}u \in C([0, T] \times \bar{\Omega}; R^M) \cap C^1(\]0, T[\times \Omega; R^M). \quad (142)$$

$$\bullet \quad \mathcal{F}u(0, x) = \mathcal{F}u(T, x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (143)$$

$$\bullet \quad \mathcal{F}u(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (144)$$

$$\bullet \quad (\partial_i f, \mathcal{F}u) \in L^p(\Omega_T; R) \quad \forall (i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}. \quad (145)$$

$$\bullet \quad (\nabla_y f, \mathcal{F}u) \in L^\infty(\Omega_T; R^M) \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}. \quad (146)$$

$$\bullet \quad \partial_i u \in L^p(\Omega_T; R^M) \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}. \quad (147)$$

L'affirmation (142) découle de (134) et du fait que $u \in D_T(\Omega_T; R^M)$. On va maintenant donner des calculs qui vérifient (143) et (144).

Pour $x \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}u(0, x) &= f(0, x, u(0, x)), \\ &= f(0, x, u(T, x)) && \text{car } u \in D_T(\Omega_T; R^M), \\ &= f(T, x, u(T, x)) && \text{par (131),} \\ &= \mathcal{F}u(T, x). \end{aligned}$$

Pour $(t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}u(t, x) &= f(t, x, u(t, x)), \\ &= f(t, x, 0) && \text{car } u \in D_T(\Omega_T; R^M), \\ &= 0 && \text{par (132).} \end{aligned}$$

L'affirmation (146) découle de l'hypothèse (139). L'affirmation (147) découle du fait que $u \in D_T(\Omega_T; R^M) \subset H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$. Les affirmations (142) à (147) sont maintenant toutes vérifiées.

Maintenant comme f est de classe C^1 sur $\]0, T[\times \Omega \times R^M$ et u est de classe C^1 sur $\]0, T[\times \Omega$, la règle de chaîne (141) s'applique à $\mathcal{F}u$.

Pour $(i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$, on obtient alors les inégalités ci-dessous :

$$\|\partial_i(f_j \diamond u)\|_{L^p} \leq \|(\partial_i f_j) \diamond u\|_{L^p} + \|\nabla_y f_j\|_{L^\infty} \|\partial_i u\|_{L^p} < \infty. \quad (148)$$

Finalement, par (142), (143), (144), (148) et la proposition 2.3.1, on a que $f \diamond u \in H_{T0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ pour tout $u \in D_T(\Omega_T; R^M)$.

Étape 2 : *Continuités de $u \mapsto f \diamond u$ et du membre de droite de (141).*

Le but de cette étape est de montrer que $f \diamond u$ et les différents termes et facteurs du membre de droite de (141) appartiennent à des espaces L^r appropriés et d'étudier la continuité de ces expressions quand u varie dans $H_{T0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$. On prend une suite $u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ dans $H_{T0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$.

- Pour l'expression $f \diamond u$, l'immersion $H_{T0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^{\frac{(N+1)p}{N+1-p}}(\Omega_T; R^M)$ entraîne que

$$u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ dans } L^{\frac{(N+1)p}{N+1-p}}(\Omega_T; R^M). \text{ D'autre part (137) entraîne que } f \text{ est}$$

$\left(\frac{(N+1)p}{N+1-p}, p\right)$ -préservante ce qui entraîne que :

$$f \diamond u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \diamond u \text{ dans } L^p(\Omega_T; R^M). \quad (149)$$

- Pour l'expression $\partial_i u$ du membre de droite de (141) il est évident que

$$\partial_i u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \partial_i u \text{ dans } L^p(\Omega_T; R^M). \quad (150)$$

Si on combine cela avec (139) et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\left\| \langle (\nabla_y f_j) \diamond u^n, \partial_i u^n - \partial_i u \rangle_{R^M} \right\|_{L^p(\Omega_T; R)} \leq C_5 \|\partial_i u^n - \partial_i u\|_{L^p(\Omega_T; R^M)}$$

et donc que

$$\langle (\nabla_y f_j) \diamond u^n, \partial_i u^n - \partial_i u \rangle_{R^M} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ dans } L^p(\Omega_T; R). \quad (151)$$

- Extrayons une sous-suite $\{u^{n(k)}\}$ de la suite $\{u^n\}$. De cette sous-suite, on peut extraire une sous-sous-suite $\{u^{n(k(r))}\}$ telle que :

$$u^{n(k(r))} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} u \text{ p.p. sur } \Omega_T, \quad (152)$$

$$\partial_i u^{n(k(r))} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \partial_i u \text{ p.p. sur } \Omega_T. \quad (153)$$

On en déduit que :

$$\left| \langle (\nabla_y f_j) \oslash u - (\nabla_y f_j) \oslash u^{n(k(r))}, \partial_i u \rangle \right| \leq 2C_5 \|\partial_i u\|_{R^M}. \quad (154)$$

Par la continuité de $\nabla_y f_j$, (152), (153), (154) et le théorème de convergence dominée on a que :

$$\langle (\nabla_y f_j) \oslash u - (\nabla_y f_j) \oslash u^{n(k(r))}, \partial_i u \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \text{ dans } L^p(\Omega_T; R).$$

On a donc montré que pour toute sous-suite de $\left\{ \langle (\nabla_y f_j) \oslash u - (\nabla_y f_j) \oslash u^{n(k(r))}, \partial_i u \rangle : r = 1, 2, 3, \dots \right\}$ il existe une sous-sous-suite L^p -convergente vers 0. Il est bien connu qu'alors :

$$\langle (\nabla_y f_j) \oslash u - (\nabla_y f_j) \oslash u^n, \partial_i u \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ dans } L^p(\Omega_T; R). \quad (155)$$

- Notons le membre de droite de (141) par :

$$\tilde{\partial}_i (f_j \oslash u) \stackrel{\text{déf}}{=} (\partial_i f_j) \oslash u + \langle (\nabla_y f_j) \oslash u, \partial_i u \rangle_{R^M}. \quad (156)$$

Alors par (138),(151),(155) on a les calculs suivants :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\partial}_i (f_j \oslash u^n) - \tilde{\partial}_i (f_j \oslash u)\|_{L^p} &\leq \begin{cases} \|(\partial_i f_j) \oslash u^n - (\partial_i f_j) \oslash u\|_{L^p} \\ + \|\langle (\nabla_y f_j) \oslash u^n, \partial_i u - \partial_i u^n \rangle\|_{L^p} \\ + \|\langle (\nabla_y f_j) \oslash u - (\nabla_y f_j) \oslash u^n, \partial_i u \rangle\|_{L^p} \end{cases} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Étape 3 : Vérifier que $f \oslash u \in H_{T_0}^{1,p}$ et la règle de chaîne pour $u \in H_{T_0}^{1,p}$.

Soient $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ et $\{u^n\} \subset D_T(\Omega_T; R^M)$ telles que $u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$.

On observe tout d'abord que $\{f \oslash u^n\}$ est une suite de Cauchy dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ par la validité de la règle de chaîne (141) pour $u^n \in D_T(\Omega_T; R^M)$ et la L^p -continuité des expressions $f \oslash v$ et $\tilde{\partial}_i (f_j \oslash v)$ quand v varie dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$. L'espace $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ est complet et $\{f \oslash u^n\}$ est une suite convergente dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$. La $H_{T_0}^{1,p}$ -limite de

$\{f \diamond u^n\}$ doit être égale à sa L^p – limite et cette L^p – limite est $f \diamond u$ par la $\left(\frac{(N+1)p}{N+1-p}, p\right)$ – préservation de f .

L'unicité de la L^p – limite et les convergences suivantes :

$$\partial_i(f_j \diamond u^n) = \tilde{\partial}_i(f_j \diamond u^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{\partial}_i(f_j \diamond u) \text{ dans } L^p(\Omega_T; R), \text{ par la continuité de } u \mapsto \partial_i(f_j \diamond u);$$

$$\partial_i(f_j \diamond u^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \partial_i(f_j \diamond u), \text{ car } f \diamond u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \diamond u \text{ dans } H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M);$$

prouve la validité de la règle de chaîne (141) pour tous les $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$. \square

On observe que dans le domaine de la chimie le taux de croissance de la fonction d'interaction est souvent de l'ordre de $\|y\|^r$ où r est le nombre de produits réagissant dans une des réactions du système. Ainsi, dans un verre d'eau contenant des ions Na^+ en concentration y_1 et des ions Cl^- en concentration y_2 la combinaison de ces ions formera des molécules de NaCl à une vitesse proportionnelle au produit $y_1 y_2$. L'inégalité (137) du théorème précédent signifie que des systèmes ayant un taux de croissance de type $\|y\|^r$ avec un exposant r arbitrairement grand peuvent être étudiés à l'aide des espaces de Sobolev. En effet, (137) permet un taux de croissance de f d'exposant $r \leq (N+1)/(N+1-p)$, or $\frac{N+1}{N+1-p} \xrightarrow{p \rightarrow (N+1)^-} +\infty$. Il y a toutefois un inconvénient, c'est qu'on aimerait bien pouvoir toujours travailler avec $p=2$, en raison des propriétés avantageuses des espaces de Hilbert. Avec $N=3$, le théorème 2.3.3 permet de travailler dans $H_{T_0}^{1,2}(\Omega_T; R^M)$ avec un exposant maximal $r=2$. Ca va quand même bien car en général une molécule complexe ne se formera pas directement à partir de molécules plus simples mais plutôt en plusieurs étapes où deux morceaux se lient ensemble pour former un morceau plus complexe.

Voici maintenant un analogue du théorème 2.3.3 pour le cas $p=N+1$.

Théorème 2.3.4

Supposons que Ω_T et f satisfont les conditions (133) à (136) du théorème 2.3.3 ainsi que les conditions ci-dessous.

- $\exists q \in [1, \infty[$, $\exists C_1 \in]0, \infty[$, $\exists C_2 \in L^1(\Omega_T; R)$ tels que

$$\|f(t, x, y)\|^{N+1} \leq C_1 \|y\|^q + C_2(t, x) \quad (157)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

- $\exists r \in [1, \infty[$, $\exists C_3 \in]0, \infty[$, $\exists C_4 \in L^1(\Omega_T; R)$ tels que

$$\|\partial_i f(t, x, y)\|^{N+1} \leq C_3 \|y\|^r + C_4(t, x) \quad (158)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$, $\forall i \in \{0, \dots, N\}$.

- $\partial f / \partial y \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times R^M; R^{M \times M}) \quad (159)$

ou bien,

$$\exists C_5 \in]0, \infty[\text{ tel que } \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) \right\| \leq C_5 \quad (160)$$

$$\forall (\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) \in \Omega_T \times R^M.$$

Alors les conclusions du théorème précédent sont valides pour $p = N + 1$.

Démonstration :

Étape 1 : Montrer que $f \circ u \in H_{T_0}^{1, N+1}(\Omega_T; R^M)$ pour les $u \in D_T(\Omega_T; R^M)$.

Prenons $u \in D_T(\Omega_T; R^M)$. De façon similaire au théorème précédent, on va d'abord vérifier les affirmations ci-dessous.

- $f \circ u \in C([0, T] \times \bar{\Omega}; R^M) \cap C^1([0, T[\times \Omega; R^M). \quad (161)$

- $f \circ u(0, x) = f \circ u(T, x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (162)$

- $f \circ u(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (163)$

- $(\partial_i f_j) \circ u \in L^{N+1}(\Omega_T; R) \quad \forall (i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}. \quad (164)$

- $(\nabla_y f_j) \circ u \in L^\infty(\Omega_T; R^M) \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}. \quad (165)$

- $\partial_i u \in L^{N+1}(\Omega_T; R^M) \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}. \quad (166)$

Les affirmations (161), (162), (163) s'obtiennent exactement de la même façon qu'au théorème précédent. L'affirmation (164) découle de la $(r, N+1)$ -préservation de $\partial_i f_j$ (par (158)) et du fait que $u \in D_T(\Omega_T; R^M) \subset L^r(\Omega_T; R^M)$. Pour vérifier (165), il y a deux cas à considérer. Si $\partial f / \partial y \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times R^M; R^{M \times M})$ alors $(\nabla_y f_j) \circ u \in C([0, T] \times \bar{\Omega}; R^M) \subset L^\infty(\Omega_T; R^M)$ pour $j = 1, \dots, M$. Si $\partial f / \partial y$ satisfait (160) alors $\|(\nabla_y f_j) \circ u\|_{L^\infty} \leq C_5$. Finalement, le fait que $u \in D_T(\Omega_T; R^M) \subset H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ entraîne (166). Les affirmations (161) à (166) sont maintenant toutes vérifiées.

Maintenant, comme au théorème précédent la règle de chaîne s'applique à $f \circ u$ sur $]0, T[\times \Omega$ et; pour $(i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}$ on a :

$$\|\partial_i (f_j \circ u)\|_{L^{N+1}} \leq \|(\partial_i f_j) \circ u\|_{L^{N+1}} + \|(\nabla_y f_j) \circ u\|_{L^\infty} \|\partial_i u\|_{L^{N+1}} < \infty. \quad (167)$$

Finalement, par (161), (162), (163), (167) et la proposition 2.3.1 on a montré que $f \circ u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ si $u \in D_T(\Omega_T; R^M)$.

Étape 2 : Continuité dans L^{N+1} de $u \mapsto f \circ u$ et du membre de droite de (141).

Soient $u \in H_{T_0}^{1,N+1}(\Omega_T; R^M)$ et une suite $\{u^n\}$ qui converge vers u dans $H_{T_0}^{1,N+1}(\Omega_T; R^M)$. L'immersion $H_{T_0}^{1,N+1}(\Omega_T; R^M) \subset L^q(\Omega_T; R^M)$ et la $(q, N+1)$ -préservation de f nous donne immédiatement que :

$$f \circ u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \circ u \text{ dans } L^{N+1}(\Omega_T; R^M). \quad (168)$$

Fixons $i \in \{0, \dots, N\}$, $j \in \{1, \dots, M\}$ et comme dans l'autre preuve désignons par $\tilde{\partial}_i (f_j \circ u)$ le membre de droite de (141).

On a que :

$$\tilde{\partial}_i (f_j \circ u^n) - \tilde{\partial}_i (f_j \circ u) = \begin{cases} (\partial_i f_j) \circ u^n - (\partial_i f_j) \circ u \\ + \langle (\nabla_y f_j) \circ u^n, \partial_i u^n - \partial_i u \rangle \\ + \langle (\nabla_y f_j) \circ u^n - (\nabla_y f_j) \circ u, \partial_i u \rangle \end{cases} \quad (169)$$

L'immersion $H_{T_0}^{1,N-1}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow L^r(\Omega_T; R^M)$ et la $(r, N+1)$ -préservation de $\partial_i f_j$ (inégalité (158)) entraînent que :

$$\langle \partial_i f_j \rangle \diamond u^n - \langle \partial_i f_j \rangle \diamond u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ dans } L^{N+1}(\Omega_T; R). \quad (170)$$

L'inégalité (160) et celle de Hölder entraînent que :

$$\left\| \langle (\nabla_y f_j) \rangle \diamond u^n, \partial_i u^n - \partial_i u \right\|_{L^{N+1}} \leq C_5 \left\| \partial_i u^n - \partial_i u \right\|_{L^{N+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (171)$$

Pour montrer que le troisième terme du membre de droite de (169) converge vers 0 dans L^{N+1} on procède comme dans la preuve du théorème précédent : 1) on extrait d'une sous suite arbitraire de la suite $\{u^n\}$ une sous-sous-suite qui converge presque partout 2) on utilise la continuité de $\nabla_y f_j$ et le théorème de convergence dominée pour montrer la L^{N+1} -convergence vers 0 de la suite $\left\{ \langle (\nabla_y f_j) \rangle \diamond u^{n(k(r))} - \langle \nabla_y f_j \rangle \diamond u, \partial_i u \right\}$ 3) comme toute sous-suite de $\left\{ \langle (\nabla_y f_j) \rangle \diamond u^n - \langle \nabla_y f_j \rangle \diamond u, \partial_i u \right\}$ contient une sous-sous-suite L^{N+1} -convergente vers 0, la suite originale est L^{N+1} -convergente vers 0. On a donc :

$$\langle (\nabla_y f_j) \rangle \diamond u^n - \langle \nabla_y f_j \rangle \diamond u, \partial_i u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ dans } L^{N+1}(\Omega_T; R). \quad (172)$$

Par (169),(170),(171),(172) on a montré que

$$\tilde{\partial}_i(f_j \diamond u^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tilde{\partial}_i(f_j \diamond u) \text{ dans } L^{N+1}(\Omega_T; R) \quad (173)$$

$$\forall i \in \{0, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, M\}.$$

Étape 3 : Vérifier que $f \diamond u \in H_{T_0}^{1,N-1}$ et la règle de chaîne pour $u \in H_{T_0}^{1,p}$.

L'argument est exactement le même qu'au théorème 2.3.3. \square

Il ne reste plus qu'à énoncer le résultat pour $p \in]N+1, \infty[$.

Théorème 2.3.5

Soit $p \in]N+1, \infty[$. Supposons que Ω_T et f satisfont les conditions (133) à (136) du théorème 2.3.3 ainsi que les conditions ci-dessous.

- $\forall (i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}$ la condition (174) ou la condition (175) est satisfaite.

- $\exists r(i, j) \in [1, \infty[$, $\exists A(i, j) \in]0, \infty[$, $\exists B_{i,j} \in L^1(\Omega_T; R)$ tels que

$$\|\partial_i f_j(t, x, y)\|^p \leq A(i, j) \|y\|^{r(i,j)} + B_{i,j}(t, x) \quad (174)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

- $\partial_i f_j \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times R^M; R)$. (175)

- $\forall (j, k) \in \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, M\}$ la condition (176) ou la condition (177) est satisfaite.

- $\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times R^M; R)$. (176)

- $\exists C(j, k) \in]0, \infty[$ tel que

$$\left\| \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) \right\| \leq C(j, k) \quad (177)$$

$\forall (\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) \in]0, T[\times \Omega \times R^M$.

Alors la conclusion du théorème 2.3.3 est vraie.

Démonstration :

Étape 1 : Montrer que $f \diamond u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ pour les $u \in D_T(\Omega_T; R^M)$.

Soit $u \in D_T(\Omega_T; R^M)$. Comme dans les deux théorèmes précédents la règle de chaîne s'applique à $f \diamond u$, il est toutefois plus pratique pour cette démonstration de l'écrire sous la forme suivante.

$$\partial_i (f_j \diamond u) = (\partial_i f_j) \diamond u + \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u \right) \partial_i u_k \quad \forall (i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}. \quad (178)$$

On va maintenant vérifier la série d'affirmations ci-après afin de pouvoir utiliser la proposition 2.3.1.

$$\bullet \bullet f \diamond u \in C([0, T] \times \bar{\Omega}; R^M) \cap C^1(]0, T[\times \Omega; R^M). \quad (179)$$

$$\bullet \bullet f \diamond u(0, x) = f \diamond u(T, x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (180)$$

$$\bullet \bullet f \diamond u(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (181)$$

- $(\partial_i f_j) \diamond u \in L^p(\Omega_T; R) \quad \forall (i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}. \quad (182)$

- $\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u \in L^p(\Omega_T; R) \quad \forall j, k \in \{1, \dots, M\}. \quad (183)$

- $\partial_i u_k \in L^p(\Omega_T; R) \quad \forall (i, k) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}. \quad (184)$

Les affirmations (179), (180), (181), (184) se vérifient avec les mêmes arguments qu'aux deux théorèmes précédents.

Vérifions maintenant (182). Soit $(i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}$. Si (i, j) satisfait (174) alors la $(r(i, j), p)$ -préservation de $\partial_i f_j$ et le fait que $u \in D_T(\Omega_T; R^M) \subset L^{r(i, j)}(\Omega_T; R^M)$ entraînent (182). Si (i, j) satisfait (175) alors $(\partial_i f_j) \diamond u \in C([0, T] \times \bar{\Omega}; R^M) \prec L^p(\Omega_T; R^M)$.

Vérifions (183). Soient $j, k \in \{1, \dots, M\}$. Si (j, k) satisfait (176) alors

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u \in C([0, T] \times \bar{\Omega}; R) \prec L^\infty(\Omega_T; R). \text{ Si } (j, k) \text{ satisfait (177) alors } \left\| \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u \right\|_{L^\infty} \leq C(j, k).$$

Maintenant, la règle de chaîne (178) et (182), (183), (184) entraînent que :

$$\left\| \partial_i (f_j \diamond u) \right\|_{L^p} \leq \left\| (\partial_i f_j) \diamond u \right\|_{L^p} + \sum_{k=1}^M \left\| \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u \right\|_{L^\infty} \left\| \partial_i u_k \right\|_{L^p} < \infty. \quad (185)$$

Finalement, la proposition 2.3.1 et les affirmations (179), (180), (181), (185) entraînent que $f \diamond u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ pour tout $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$.

Étape 2 : Continuité dans L^p de $u \mapsto f \diamond u$ et du membre de droite de (178).

Soient $u, u^n \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) telles que $u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$.

L'immersion $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \prec C([0, T] \times \bar{\Omega}; R^M)$ et le fait que $f \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times R^M; R^M)$ entraînent que $f \diamond u^n(t, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \diamond u(t, x)$ pour tout (t, x) dans le compact $[0, T] \times \bar{\Omega}$. Comme

les fonctions $f \diamond u, f \diamond u^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) sont toutes continues on a :

$$\mathcal{F}u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}u \text{ dans } C([0, T] \times \overline{\Omega}; R^M) \hookrightarrow L^p([0, T] \times \overline{\Omega}; R^M). \quad (186)$$

La continuité de la fonction $\hat{f} : H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \rightarrow L^p(\Omega_T; R^M) : u \mapsto \mathcal{F}u$ est donc prouvée.

On va maintenant montrer que le membre de droite de (178) varie continuellement dans L^p quand u varie dans $H_{T_0}^{1,p}$. Notons le membre de droite de (178) par :

$$\tilde{\partial}_i(f_j \diamond v) \stackrel{\text{déf}}{=} (\partial_i f_j) \diamond v + \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond v \right) \partial_i v_k \quad (187)$$

pour $(i, j) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}$, $v \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$.

On a alors que :

$$\tilde{\partial}_i(f_j \diamond u^n) - \tilde{\partial}_i(f_j \diamond u) = \begin{cases} (\partial_i f_j) \diamond u^n - (\partial_i f_j) \diamond u \\ + \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n \right) (\partial_i u_k^n - \partial_i u_k) \\ + \sum_{k=1}^M \partial_i u_k \left[\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n - \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u \right]. \end{cases} \quad (188)$$

Il nous suffira que les trois termes du membre de droite de (188) converge vers 0 dans L^p pour avoir que l'expression $\tilde{\partial}_i(f_j \diamond v)$ varie continuellement dans L^p quand u varie dans $H_{T_0}^{1,p}$.

Le premier terme converge vers 0 dans $C([0, T] \times \overline{\Omega}; R^M) \hookrightarrow L^p(\Omega_T; R^M)$. Ceci à cause de l'immersion $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow C([0, T] \times \overline{\Omega}; R^M)$ et de l'hypothèse (134).

Fixons $(i, j, k) \in \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, M\}$ et étudions le terme correspondant dans la sommation au deuxième terme du membre de droite de (188). Le couple (j, k) peut satisfaire la condition (176) ou la condition (177). Montrons que dans ces deux cas, nous avons :

$$\exists \tilde{C}(j, k) \in]0, \infty[\text{ tel que } \left| \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n(t, x) \right| \leq \tilde{C}(j, k), \text{ pour } (t, x) \text{ p.p. dans } \Omega_T. \quad (189)$$

Si (j, k) satisfait (177), on prend $\tilde{C}(j, k) = C(j, k)$. Si (j, k) satisfait (176) alors on a la convergence :

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u \text{ dans } C([0, T] \times \bar{\Omega}; R^M) \prec L^\infty(\Omega_T; R^M). \quad (190)$$

$$\text{On peut donc prendre } \tilde{C}(j, k) = \sup_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n \right\|_{L^\infty}.$$

Maintenant, la convergence du deuxième terme du membre de droite de (188) s'obtient à partir de l'inégalité de Hölder et de (189).

$$\left\| \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_{k_i}} \diamond u^n \right) (\partial_i u_k^n - \partial_i u_k) \right\|_{L^p(\Omega_T; R)} \leq \tilde{C}(j, k) \|\partial_i u_k^n - \partial_i u_k\|_{L^p(\Omega_T; R)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (191)$$

Étudions finalement le terme correspondant au (i, j, k) qu'on a choisi tantôt dans la sommation au troisième terme du membre de droite de (188). On va utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer la convergence de ce terme. Dans un premier temps nous allons montrer les deux affirmations suivantes :

$$\bullet \quad \exists \hat{C}(j, k) \in]0, \infty[\text{ tel que } \left| \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n(t, x) - \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u(t, x) \right| \leq \hat{C}(j, k) \quad (192)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T ,

$$\bullet \quad \left| \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n(t, x) - \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u(t, x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ pour } (t, x) \text{ p.p. dans } \Omega_T. \quad (193)$$

Si le couple (j, k) satisfait (176) alors on a déjà vu que $\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n$ converge uniformément

vers la fonction $\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u$ sur le compact $[0, T] \times \bar{\Omega}$. En prenant

$$\hat{C}(j, k) = 2 \sup_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u_k^n \right\|_{L^\infty} \text{ on a (192) et (193). Si } (j, k) \text{ satisfait (177) alors en posant}$$

$\hat{C}(j, k) = 2C(j, k)$, on a (192). La continuité de $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$ sur $]0, T[\times \Omega \times R^M$ et la convergence ponctuelle de u^n vers u sur $]0, T[\times \Omega$ entraînent (193).

Maintenant, grâce à (192) et (193) on a les conditions :

$$\left| \partial_i u_k \left[\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n - \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right] \right| (t, x) \leq \hat{C}(j, k) |\partial_i u_k(t, x)|, \quad (194)$$

$$\left| \partial_i u_k \left[\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n - \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right] \right| (t, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (195)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T .

Le théorème de convergence dominée permet alors de conclure que :

$$\partial_i u_k \left[\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \diamond u^n - \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ dans } L^p(\Omega_T; R). \quad (196)$$

Étape 3 : Vérifier que $f \diamond u \in H_{T_0}^{1, N-1}$ et la règle de chaîne pour $u \in H_{T_0}^{1, p}$.

L'argument est exactement le même qu'au théorème 2.3.3. \square

Nous allons maintenant prouver la proposition 2.3.1. Avant de donner la démonstration comme telle de ce résultat, on doit énoncer et prouver un certain nombre de lemmes techniques.

Lemme 2.3.6

Soient $p \in [1, \infty[$ et $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné.

Soit également $u \in C([0, T] \times \overline{\Omega}) \cap W^{1, p}(\Omega_T)$ telle que :

$$u(0, x) = u(T, x) \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad (196)$$

et pour laquelle il existe $\rho > 0$ tel que :

$$u(t, x) = 0 \text{ si distance}(x, \partial\Omega) < \rho. \quad (197)$$

Alors

$$u \in H_{T_0}^{1, p}(\Omega_T) \quad (198)$$

Démonstration :

Considérons le prolongement suivant de u :

$$\hat{u}(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in R \text{ et } x \in R^N - \Omega, \\ u(t - rT, x) & \text{si } x \in \bar{\Omega} \text{ et } t \in [rT, (r+1)T] \text{ pour un certain } r \in Z. \end{cases}$$

Par le lemme 2.2.7, $\hat{u} \in W_{loc}^{1,p}(R^{N+1})$.

Soit une fonction régularisante $\psi \in D\left(\frac{\rho}{2} B\right)$ et posons

$$\psi_n(t, x) = n^{-N-1} \psi(n^{-1}t, n^{-1}x)$$

pour $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $(t, x) \in R^{N+1}$.

On a alors :

$$\psi_n * \hat{u}|_{\Omega_T} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega_T)$$

$$\{\psi_n * \hat{u}|_{\Omega_T}\} \subset D_T(\Omega_T). \quad \square$$

Lemme 2.3.7

Soient $p \in [1, \infty[$ et $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné. Soient également $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$

Alors $\max(u, v), \min(u, v) \in W^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration :

Il suffit de vérifier que $\max(u, v) \in W^{1,p}(\Omega)$ puisque $\min(u, v) = -\max(-u, -v)$.

Il est facile à vérifier que

$$\max(u, v) = \frac{u+v}{2} + \frac{|u-v|}{2}.$$

Il suffit donc de vérifier l'affirmation suivante :

$$|u| \in W^{1,p}(\Omega) \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega).$$

Considérons la suite $\{f_n\} \subset C^1(R; R)$ définie par la formule suivante :

$$f_n(w) = \begin{cases} |w| & \text{si } |w| \geq \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}w^2 + \frac{1}{2n} & \text{si } |w| \leq \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (199)$$

On voit facilement que f_n est de classe C^1 et sa dérivée est donnée par

$$f'_n(w) = \begin{cases} -1 & \text{si } w \leq -1/n, \\ mw & \text{si } -1/n \leq w \leq 1/n, \\ +1 & \text{si } w \geq 1/n. \end{cases} \quad (200)$$

On va vérifier que :

$$\{f_n \circ u\} \subset W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega), \quad (201)$$

$$f_n \circ u \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |u| \text{ dans } L^p(\Omega), \quad (202)$$

$$\nabla(f_n \circ u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \nabla|u| \text{ dans } L^p(\Omega; R^N). \quad (203)$$

Vérifions (201). Comme f_n et u sont de classe C^1 , la composition $f_n \circ u$ également. En appliquant la règle de chaîne on trouve :

$$\nabla(f_n \circ u) = (f'_n \circ u) \nabla u. \quad (204)$$

Grâce à (200), on trouve alors :

$$\|\nabla(f_n \circ u)(x)\|_{R^N} \leq |f'_n(u(x))| \|\nabla u(x)\|_{R^N} \leq \|\nabla u(x)\|_{R^N} \quad \forall x \in \Omega, n=1,2,3,\dots \quad (205)$$

En utilisant (199), on obtient la majoration suivante de $f_n \circ u$.

$$0 \leq f_n(u(x)) \leq |u(x)| + 1/2n \quad \forall x \in \Omega, n=1,2,3,\dots \quad (206)$$

Ces majorations avec le fait que $f_n \circ u \in C^1(\Omega)$ entraînent que $f_n \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$.

L'affirmation (201) est donc prouvée. Nous allons maintenant prouver (202) et (203). Les inégalités (205) et (206) nous permettront d'utiliser le théorème de convergence dominée.

Considérons les sous ensembles ouverts suivants de Ω :

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}, \quad \Omega^- = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}, \quad (207)$$

$$\Omega^0 = \text{intérieur} \{x \in \Omega : u(x) = 0\}. \quad (208)$$

L'union de ces trois ensembles recouvre presque tout Ω . On va vérifier que sur chacun de ces trois ensembles on a convergence ponctuelle de $f_n \circ u$ vers $|u|$ et de $\nabla(f_n \circ u)$ vers $\nabla|u|$.

- Soit $x \in \Omega^-$. Alors $\exists n(x) \in \{1, 2, 3, \dots\}$ tel que :

$$u(x) \gg \frac{1}{n(x)} \geq \frac{1}{n} \text{ pour tout entier } n \geq n(x).$$

Par la continuité de u , on aura que $u(\hat{x}) \gg \frac{1}{n}$ si \hat{x} est suffisamment près de x . On aura

donc que :

$$f_n \circ u(\hat{x}) = |u(\hat{x})| = u(\hat{x}) \text{ pour } n \geq n(x), \text{ pour } \hat{x} \text{ suffisamment près de } x. \quad (209)$$

Comme $f_n \circ u = u$ sur une boule ouverte autour de x , on a que :

$$\nabla(f_n \circ u)(x) - \nabla u(x) = 0 \text{ pour } n \geq n(x). \quad (210)$$

On a donc montré que :

$\forall x \in \Omega^+$, $\exists n(x)$ un entier positif tel que pour tout entier $n \geq n(x)$ on a :

$$f_n \circ u(x) - |u|(x) = 0, \quad (211)$$

$$\nabla(f_n \circ u)(x) - \nabla |u|(x) = 0.$$

- En appliquant un raisonnement presque identique au précédent on trouve que l'ensemble Ω^- satisfait la propriété ci-dessous.

$\forall x \in \Omega^-$, $\exists n(x)$ un entier positif tel que pour tout entier $n \geq n(x)$ on a :

$$f_n \circ u(x) - |u|(x) = 0, \quad (212)$$

$$\nabla(f_n \circ u)(x) - \nabla |u|(x) = 0.$$

- Soit $x \in \Omega^0$. On alors que :

$$f_n \circ u(x) - |u|(x) = 1/2n - 0 = 1/2n. \quad (213)$$

Comme Ω_0 est un ouvert la formule (213) demeure vraie sur une boule ouverte autour de x . On a donc le droit de dériver cette formule. On a alors :

$$\nabla[f_n \circ u - |u|](x) = 0. \quad (214)$$

On a donc montré les affirmations ci-après.

$$\forall x \in \Omega^0, |f_n \circ u(x) - |u(x)|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (215)$$

$$\forall x \in \Omega^0, \|\nabla[f_n \circ u](x) - \nabla|u|(x)\| = 0. \quad (216)$$

On donc montré que :

$$|f_n \circ u(x) - |u(x)|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \|\nabla[f_n \circ u](x) - \nabla|u|(x)\|_{R^N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ pour } x \text{ p.p. dans } \Omega.$$

On d'autre part grâce à (199) et (200) les majorations :

$$|f_n \circ u(x) - |u(x)|| \leq 2|u(x)| + 1/2n, \|\nabla[f_n \circ u](x) - \nabla|u|(x)\|_{R^N} \leq 2\|\nabla u(x)\|_{R^N}$$

pour x p.p. dans Ω . Donc par le théorème de convergence dominée $f_n \circ u \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |u|$ dans

$W^{1,p}(\Omega)$. \square

Lemme 2.3.8

Soient $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné et $p \in [1, \infty[$.

Soit $u \in C([0, T] \times \overline{\Omega}) \cap C^1([0, T[\times \Omega) \cap W^{1,p}(\Omega_T)$ telle que :

$$u(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (217)$$

$$u(0, x) = u(T, x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (218)$$

Alors

$$u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T). \quad (219)$$

Démonstration :

Étape 1 : Construire une famille $\{u_\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$.

Pour les $\varepsilon > 0$ on définit les objets suivants :

$$E^\varepsilon = \{(t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega} : |u(t, x)| \geq \varepsilon\}, \quad (220)$$

$$E^{\varepsilon,+} = \{(t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega} : u(t, x) \geq \varepsilon\}, \quad (221)$$

$$E^{\varepsilon,-} = \{(t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega} : u(t, x) \leq -\varepsilon\}, \quad (222)$$

$$E^+ = \{(t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega} : u(t, x) > 0\}, \quad (223)$$

$$E^- = \{(t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega} : u(t, x) < 0\}, \quad (224)$$

$$E^0 = \{(t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega} : u(t, x) = 0\}; \quad (225)$$

$$u_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega} - E^\varepsilon, \\ u(t, x) - \varepsilon & \text{si } (t, x) \in E^{\varepsilon^-}, \\ u(t, x) + \varepsilon & \text{si } (t, x) \in E^{\varepsilon^-}; \end{cases} \quad (226)$$

$$= \min \{u(t, x) + \varepsilon, \max \{u(t, x) - \varepsilon, 0\}\}$$

On veut montrer que la famille $\{u_\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$. Grâce au lemme 2.3.6, il suffit pour cela de vérifier pour les $\varepsilon > 0$ les affirmations suivantes :

$$u_\varepsilon \in C([0, T] \times \overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega_T), \quad (227)$$

$$u_\varepsilon(0, x) = u_\varepsilon(T, x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (228)$$

$$\rho(\varepsilon) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{distance}(E^\varepsilon, [0, T] \times \partial\Omega) > 0, \quad (229)$$

$$\text{distance}(x, \partial\Omega) < \rho(\varepsilon) \Rightarrow u(t, x) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (230)$$

Concernant l'affirmation (227), on a premièrement que le minimum et le maximum de deux fonctions continues sont des fonctions continues et de (226) on trouve que $u_\varepsilon \in C([0, T] \times \overline{\Omega})$. On a deuxièmement que $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_T)$ par le lemme 2.3.7.

Les calculs ci-dessous démontrent (228).

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(0, x) &= \min \{u(0, x) + \varepsilon, \max \{u(0, x) - \varepsilon, 0\}\} \\ &= \min \{u(T, x) + \varepsilon, \max \{u(T, x) - \varepsilon, 0\}\} \\ &= u_\varepsilon(T, x) \end{aligned}$$

Supposons que l'inégalité (229) soit fautive. Alors il existe des suites $\{z^n\} \subset E^\varepsilon$ et $\{w^n\} \subset [0, T] \times \partial\Omega$ telles que :

$$\|z^n - w^n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (231)$$

Par la propriété de Bolzano-Weierstrass il existe une sous-suite $\{(z^{n(k)}, w^{n(k)})\}$ qui converge vers un point (\bar{z}, \bar{w}) du compact $E^\varepsilon \times [0, T] \times \partial\Omega$. On a alors la contradiction :

$$\|z^{n(k)} - w^{n(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \bar{z} = \bar{w},$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{z} \in E^\varepsilon \\ \bar{w} \in [0, T] \times \partial\Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_\varepsilon(\bar{z}) \geq \varepsilon \\ u_\varepsilon(\bar{w}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{z} \neq \bar{w}.$$

Prouvons maintenant (230). On remarque tout d'abord que :

$$\text{distance}((t, x), [0, T] \times \partial\Omega) = \text{distance}(x, \partial\Omega) \quad (232)$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \bar{\Omega}$. En effet, soit (\hat{t}, \hat{x}) le point du compact $[0, T] \times \partial\Omega$ le plus près de (t, x) . Alors ce point minimisera l'expression $(t - \tilde{t})^2 + \|x - \tilde{x}\|^2$ parmi les $\tilde{t} \in [0, T]$ et les $\tilde{x} \in \partial\Omega$ et on aura que $\hat{t} = t$ et $\|x - \hat{x}\| = \text{distance}(x, \partial\Omega)$.

L'équation (232) permet alors de faire le raisonnement ci-dessous.

$$\begin{aligned} \text{distance}(x, \partial\Omega) \chi_{\rho(\varepsilon)} &\Rightarrow \text{distance}((t, x), [0, T] \times \partial\Omega) \chi_{\rho(\varepsilon)} \\ &\Rightarrow (t, x) \notin E^\varepsilon \\ &\Rightarrow u(t, x) = 0 \end{aligned}$$

Les affirmations (227) à (230) sont donc toutes démontrées et le lemme 2.3.7 nous permet de conclure que la famille $\{u_\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$.

Étape 2 : Montrer que $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u$ dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$.

Par la définition des u_ε on a immédiatement que

$$|u_\varepsilon(t, x) - u(t, x)| \leq \varepsilon$$

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \bar{\Omega}, \forall \varepsilon > 0.$$

Comme Ω est borné, on a

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u \text{ dans } L^\infty(\Omega_T) \hookrightarrow L^p(\Omega_T). \quad (233)$$

Il ne reste plus qu'à vérifier la convergence suivante :

$$\nabla(u_\varepsilon - u) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \text{ dans } L^p(\Omega_T; \mathbb{R}^N). \quad (234)$$

On va pour prouver cela utiliser le théorème de convergence dominée.

Considérons les ensembles suivants :

$$\tilde{E}^{\varepsilon,+} = \text{intérieur}(E^{\varepsilon,+}), \quad \tilde{E}^{\varepsilon,-} = \text{intérieur}(E^{\varepsilon,-}), \quad (235)$$

$$\tilde{E}^+ = \text{intérieur}(E^+) = E^+ \cap]0, T[\times \Omega, \quad (236)$$

$$\tilde{E}^- = \text{intérieur}(E^-) = E^- \cap]0, T[\times \Omega, \quad (237)$$

$$\tilde{E}^0 = \text{intérieur}(E^0), \quad (238)$$

$$\tilde{E}^{-\varepsilon,\varepsilon} = \{(t, x) \in]0, T[\times \Omega : -\varepsilon < u(t, x) < \varepsilon\}. \quad (239)$$

Nous allons maintenant montrer que :

$$\|\nabla[u - u_\varepsilon](t, x)\|_{R^N} \leq \|\nabla u(t, x)\|_{R^N} \quad (240)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall \varepsilon > 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$. On observe tout d'abord que $\tilde{E}^{\varepsilon,-} \cup \tilde{E}^{-\varepsilon,\varepsilon} \cup \tilde{E}^{\varepsilon,+}$ occupe presque tout Ω_T .

On prend donc $(t, x) \in \tilde{E}^{\varepsilon,-} \cup \tilde{E}^{-\varepsilon,\varepsilon} \cup \tilde{E}^{\varepsilon,+}$ et on étudie la valeur de $\nabla[u - u_\varepsilon](t, x)$.

Cas 1 : $(t, x) \in \tilde{E}^{-\varepsilon,\varepsilon}$.

Par les définitions de u_ε et $\tilde{E}^{-\varepsilon,\varepsilon}$ on a que $u_\varepsilon(t, x) = 0$ et comme $\tilde{E}^{-\varepsilon,\varepsilon}$ est un ouvert on a que :

$$u(\hat{t}, \hat{x}) - u_\varepsilon(\hat{t}, \hat{x}) = u(\hat{t}, \hat{x})$$

si (\hat{t}, \hat{x}) est suffisamment près de (t, x) .

Comme u est de classe C^1 au voisinage de (t, x) on a que :

$$\nabla[u - u_\varepsilon](t, x) = \nabla u(t, x) \quad \forall (t, x) \in \tilde{E}^{-\varepsilon,\varepsilon}. \quad (241)$$

Cas 2 : $(t, x) \in \tilde{E}^{\varepsilon,+}$.

Par les définitions de u_ε et $\tilde{E}^{\varepsilon,+}$, on a que $[u - u_\varepsilon](t, x) = \varepsilon$ et comme $\tilde{E}^{\varepsilon,+}$ est un ouvert

On a que :

$$[u - u_\varepsilon](\hat{t}, \hat{x}) = \varepsilon$$

si (\hat{t}, \hat{x}) est suffisamment près de (t, x) .

En dérivant on trouve que :

$$\nabla[u - u_\varepsilon](t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \tilde{E}^{\varepsilon,+}. \quad (242)$$

Cas 3 : $(t, x) \in \tilde{E}^{\varepsilon,-}$.

Ce cas se traite comme le précédent. On a donc que :

$$[u - u_\varepsilon](\hat{t}, \hat{x}) = -\varepsilon$$

si (\hat{t}, \hat{x}) est suffisamment près de (t, x) . En dérivant on trouve :

$$\nabla[u - u_\varepsilon](t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \tilde{E}^{\varepsilon,-}. \quad (243)$$

Par (241), (242) et (243), on a que

$$\|\nabla[u - u_\varepsilon](t, x)\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|\nabla u(t, x)\| \text{ pour } (t, x) \text{ p.p. dans } \Omega_T. \quad (244)$$

Vérifions maintenant que $\nabla[u - u_\varepsilon](t, x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ pour (t, x) p.p. dans Ω_T .

Nous avons que $\tilde{E}^+ \cup \tilde{E}^- \cup \tilde{E}^0$ occupe presque tout Ω_T . Prenons $(t, x) \in \tilde{E}^+ \cup \tilde{E}^- \cup \tilde{E}^0$ et étudions la convergence de $\nabla[u - u_\varepsilon](t, x)$.

Cas 1 : $(t, x) \in \tilde{E}^+$.

Dans ce cas il existe $\varepsilon(t, x) > 0$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon(t, x)] \text{ on a } (t, x) \in \tilde{E}^{\varepsilon,+}. \quad (245)$$

En effet, si $(t, x) \in \tilde{E}^+$ alors il existe $\delta = \delta(t, x) > 0$ tel que $u(\hat{t}, \hat{x}) > 0$ si $\|(t - \hat{t}, x - \hat{x})\| < \delta$.

Prenons $\varepsilon(t, x) = \min \{u(\hat{t}, \hat{x}) : \|(t - \hat{t}, x - \hat{x})\| \leq \delta/2\}$. Il est alors clair que la boule ouverte $(t, x) + \delta/2 B$ est incluse dans $E^{\varepsilon,+}$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon(t, x)]$; ce qui entraîne que $(t, x) \in \text{intérieur}(E^{\varepsilon,+}) = \tilde{E}^{\varepsilon,+}$.

Maintenant par (245) et par la définition de u_ε on a que $u(t, x) - u_\varepsilon(t, x) = \varepsilon$ et comme $\tilde{E}^{\varepsilon,+}$ est un ouvert on a :

$$u(\hat{t}, \hat{x}) - u_\varepsilon(\hat{t}, \hat{x}) = \varepsilon$$

pour (\hat{t}, \hat{x}) au voisinage de (t, x) .

Ceci entraîne que :

$$\forall (t, x) \in \tilde{E}^{\varepsilon,+}, \exists \varepsilon(t, x) > 0 \text{ tel que } \nabla[u - u_\varepsilon](t, x) = 0 \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon(t, x)]. \quad (246)$$

Cas 2 : $(t, x) \in \tilde{E}^-$.

Par un raisonnement semblable au précédent, on obtient que:

$$\forall (t, x) \in \tilde{E}^{\varepsilon,-}, \exists \varepsilon(t, x) > 0 \text{ tel que } \nabla[u - u_\varepsilon](t, x) = 0 \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon(t, x)]. \quad (247)$$

Cas 3 : $(t, x) \in \tilde{E}^0$.

On a que :

$$\begin{aligned} (t, x) \in \tilde{E}^0 &\Rightarrow |u(t, x)| < \varepsilon (\forall \varepsilon > 0) \\ &\Rightarrow (t, x) \notin E^\varepsilon (\forall \varepsilon > 0) \\ &\Rightarrow u_\varepsilon(t, x) = 0 (\forall \varepsilon > 0) \end{aligned}$$

Comme \tilde{E}^0 est un ouvert on a que :

$$u(\hat{t}, \hat{x}) - u_\varepsilon(\hat{t}, \hat{x}) = 0 - 0 = 0$$

pour (\hat{t}, \hat{x}) au voisinage de (t, x) .

Ceci entraine que :

$$\nabla[u - u_\varepsilon](t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \tilde{E}^0, \forall \varepsilon > 0. \quad (248)$$

On vient donc de vérifier que :

$$\|\nabla[u - u_\varepsilon](t, x)\|_{R^N} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \text{ pour } (t, x) \text{ p.p. dans } \Omega_T. \quad (249)$$

On combinant (244),(249), le fait que $\nabla u \in L^p(\Omega_T; R^N)$ avec le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \nabla u \text{ dans } L^p(\Omega_T; R^N). \quad (250)$$

Finalement comme $\{u_\varepsilon\} \subset H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$, $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u$ dans $L^p(\Omega_T)$ et $\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \nabla u$ dans $L^p(\Omega_T; R^N)$ on a que $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u$ dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$ et donc que $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$. \square

La proposition 2.3.1 est maintenant un corollaire facile du lemme 2.3.8.

Démonstration de la proposition 2.3.1 :

Soient v_1, \dots, v_M les composantes de v . Si v satisfait les hypothèses de la proposition 2.3.1 alors chaque v_j ($j=1, \dots, M$) satisfait celles du lemme 2.3.8. Alors chaque $v_j \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$ ($j=1, \dots, M$), ce qui revient à dire que $v \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$. En effet, si $v_j \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T)$ ($j=1, \dots, M$) alors il existe des suites $\{v_j^n : n=1, 2, 3, \dots\} \subset D_T(\Omega_T)$

($j=1, \dots, M$) telles que $v_j^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v_j$ dans $W^{1,p}(\Omega_T)$. On a alors que la suite

$\left\{v^n \stackrel{\text{def}}{=} (v_1^n, \dots, v_M^n)\right\}$ satisfait $\{v^n\} \subset D_T(\Omega_T; R^M)$ et $v^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v$ dans $W^{1,p}(\Omega_T; R^M)$. \square

2.4 Différentes versions du problème.

Dans cette section nous présenterons différentes variations du problème (P1)+(P2) décrit dans l'introduction et des conditions qui font que les solutions de ces différentes versions coïncident.

Version classique

$$(VC) \quad \left. \begin{aligned} (u, v) &\in C(R \times \bar{\Omega}; R^{2M}) \cap C^2(R \times \Omega; R^{2M}), \\ \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta_x u &= f \circ u \\ -\frac{\partial v}{\partial t} - D\Delta_x v &= \left[\frac{\partial f}{\partial y} \circ u \right]' v \end{aligned} \right\} \text{sur } R \times \Omega,$$

$$\left. \begin{aligned} u(t, x) &= 0 \\ v(t, x) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{sur } R \times \partial\Omega,$$

$$\left. \begin{aligned} u(t, x) &= u(t+T, x) \\ v(t, x) &= v(t+T, x) \end{aligned} \right\} \text{sur } R \times \Omega.$$

Version variationnelle

$$(VAR) \quad \begin{aligned} (u, v) &\in H_{T0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T0}^{1,q}(\Omega_T; R^M) \\ \nabla \varphi(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

Version faible

$$(ff) \quad \begin{aligned} (u, v) &\in H_{T0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T0}^{1,q}(\Omega_T; R^M) \\ \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial b}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \langle f \circ u, b \rangle_{R^M} \right\} d(t, x) &= 0 \quad b \in D_T(\Omega_T; R^M), \\ \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle v, \frac{\partial a}{\partial t} \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial v}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial a}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \left\langle \left[\frac{\partial f}{\partial y} \circ u \right]' v, a \right\rangle_{R^M} \right\} d(t, x) &= 0 \quad a \in D_T(\Omega_T; R^M). \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1 :

D'autres "versions classiques" du problème sont possibles. Par exemple, nous pourrions prendre $(u, v) \in C(R \times \bar{\Omega}; R^{2M}) \cap C_t^1(R \times \Omega; R^{2M}) \cap C_x^2(R \times \Omega; R^{2M})$, où C_t^1 désigne les

fonctions continuellement différentiables selon la variable t et C_x^2 désigne les fonctions deux fois continuellement différentiables selon les variables spatiales x_1, \dots, x_N . On a choisi cette version classique pour ne pas alourdir ce texte. La preuve du théorème 2.4.2 pour la deuxième "version classique" est inchangée sauf de petits détails de notation.

Théorème 2.4.2

Supposons que $p = q = 2$, que Ω est borné et que f satisfait les conditions ci-après.

- $f \in C(R \times \bar{\Omega} \times R^M; R^M) \cap C^1(R \times \Omega \times R^M; R^M)$. (251)

- $f(t, x, y) = f(t + T, x, y) \quad \forall (t, x, y) \in R \times \Omega \times R^M$. (252)

- $f(t, x, 0) = 0 \quad \forall (t, x) \in R \times \partial\Omega$. (253)

- $\exists a_1 \in]0, \infty[, \exists a_2 \in L^1(\Omega_T)$ tels que

$$\|f(t, x, y)\|^2 \leq a_1 \|y\|^{\frac{2N+2}{N-1}} + a_2(t, x) \quad (254)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

- $\exists a_3 \in]0, \infty[, \exists a_4 \in L^1(\Omega_T)$ tels que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, y) \right\|^{\frac{N+1}{2}} \leq a_3 \|y\|^{\frac{2N+2}{N-1}} + a_4(t, x) \quad (255)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

Alors

1. Si (u, v) est une solution de (VC) et $(u, v)|_{\Omega_T} \in H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M})$ alors $(u, v)|_{\Omega_T}$ est solution de (ff).
2. Si on suppose que Ω est L-régulier alors si (u, v) est solution de (ff) et que son prolongement périodique (\tilde{u}, \tilde{v}) satisfait $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in C(R \times \bar{\Omega}; R^{2M}) \cap C^2(R \times \Omega; R^{2M})$ alors (\tilde{u}, \tilde{v}) solutionne (VC).
3. (u, v) est solution de (ff) $\Leftrightarrow (u, v)$ est point critique de φ .

Démonstration :

Preuve de 1.

Soit $(u, v) \in C(R \times \bar{\Omega}; R^{2M}) \cap C^2(R \times \Omega; R^{2M})$ une solution de (VC) telle que $(u, v)|_{\Omega_T} \in H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M})$. Soient $a, b \in D_T(\Omega_T; R^M)$. On a alors les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle v, \frac{\partial a}{\partial t} \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial v}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial a}{\partial x} \right\rangle_{R^{M \times N}} - \left\langle \left[\frac{\partial f}{\partial y} \circ u \right]' v, a \right\rangle_{R^M} \right\} d(t, x) \\
 &= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[v_i \frac{\partial a_i}{\partial t} + d_i \langle \nabla_x v_i, \nabla_x a_i \rangle_{R^N} - \left\langle \frac{\partial f}{\partial y_i} \circ u, v \right\rangle_{R^M} a_i \right] d(t, x) \\
 &= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[-\frac{\partial v_i}{\partial t} - d_i \Delta_x v_i - \left\langle \frac{\partial f}{\partial y_i} \circ u, v \right\rangle_{R^M} \right] a_i d(t, x) \\
 &= \int_{\Omega_T} \left\langle -\frac{\partial v}{\partial t} - D \Delta_x v - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \circ u \right]' v, a \right\rangle_{R^M} d(t, x) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial b}{\partial x} \right\rangle_{R^{M \times N}} - \langle f \circ u, b \rangle_{R^M} \right\} d(t, x) \\
 &= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} b_i + d_i \langle \nabla_x u_i, \nabla_x b_i \rangle_{R^N} - [f_i \circ u] b_i \right] d(t, x) \\
 &= \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} - d_i \Delta_x u_i - f_i \circ u \right] b_i d(t, x) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Preuve de 2.

Soit $(u, v) \in H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M})$ une solution de (ff) dont le prolongement périodique $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in C(R \times \bar{\Omega}; R^{2M}) \cap C^2(R \times \Omega; R^{2M})$. On observe que si K est un compact dans Ω_T alors $(u, v) \in C^2(K; R^{2M}) \subset W^2(K; R^{2M})$. On a que :

$$\int_{\Omega_T} \left\langle \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta_x u - f \circ u \right\}, b \right\rangle_{R^M} d(t, x) = 0 \quad \forall b \in D(\]0, T[\times \Omega; R^M) \subset D_T(\Omega_T; R^M)$$

$$\int_{\Omega_T} \left\langle -\frac{\partial v}{\partial t} - D \Delta_x v - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \circ u \right]' v, a \right\rangle_{R^M} d(t, x) = 0 \quad \forall a \in D(\]0, T[\times \Omega; R^M).$$

Par la densité de $D([0, T] \times \Omega; R^M)$ dans $L^2(\Omega_T; R^M)$, on trouve :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta_x u - f\partial u \right\|_{L^2(K; R^M)} = \left\| -\frac{\partial v}{\partial t} - D\Delta_x v - \left[\frac{\partial f}{\partial y} \diamond u \right]' v \right\|_{L^2(K; R^M)} = 0$$

pour tout compact $K \subset]0, T[\times \Omega$. Cela signifie que (\tilde{u}, \tilde{v}) satisfait les lignes 2 et 3 de (VC). La ligne 1 du problème est satisfaite car on a posé au départ que $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in C(R \times \bar{\Omega}; R^{2M}) \cap C^2(R \times \Omega; R^{2M})$. Il nous reste à vérifier que (\tilde{u}, \tilde{v}) satisfait la condition Dirichlet-périodique donnée par les quatre dernières lignes de (VC). La périodicité est vraie par définition puisque (\tilde{u}, \tilde{v}) est le prolongement périodique de (u, v) . Il nous reste à vérifier que $(\tilde{u}, \tilde{v})|_{R \cdot \partial\Omega} = 0$ ou, ce qui est équivalent, que $(u, v)|_{[0, T] \cdot \partial\Omega} = 0$. Mais grâce à l'hypothèse de L-régularité de Ω on a que

$$0 = \text{Trace}[(u, v) : [0, T] \times \partial\Omega] = (u, v)|_{[0, T] \cdot \partial\Omega}.$$

Preuve de 3.a : (u, v) solution de (ff) $\Rightarrow (u, v)$ point critique de φ

Soit $(u, v) \in H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M})$ une solution de (ff). Pour montrer que (u, v) est un point critique de φ il suffit de vérifier que $\langle \nabla \varphi(u, v), (a, b) \rangle_{W^1} = 0$ pour tout $(a, b) \in D_T(\Omega_T; R^{2M})$ puisque $D_T(\Omega_T; R^{2M})$ est dense dans $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M})$. Prenons $(a, b) \in D_T(\Omega_T; R^{2M})$. Comme f et Ω satisfont les conditions du théorème 2.1.6, φ est de classe C^1 et on peut appliquer la formule (39) pour calculer la dérivée de φ . On a alors les calculs ci-après.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \varphi(u, v), (\alpha, b) \rangle_{W^1} &= \left\{ \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} b_i + d_i \langle \nabla_x u_i, \nabla_x b_i \rangle_{R^N} - (f_i \diamond u) b_i \right] dt dx \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} a_i + d_i \langle \nabla_x v_i, \nabla_x a_i \rangle_{R^N} - v_i \langle (\nabla_y f_i) \diamond u, a \rangle_{R^M} \right] dt dx \right\} \\
&= \left\{ \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial b}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \langle f \diamond u, b \rangle_{R^M} \right\} dt dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle v, \frac{\partial a}{\partial t} \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial v}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial a}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \left\langle v, \left[\frac{\partial f}{\partial y} \diamond u \right] a \right\rangle_{R^M} \right\} dt dx \right\} \\
&= \left\{ \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial b}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \langle f \diamond u, b \rangle_{R^M} \right\} dt dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle v, \frac{\partial a}{\partial t} \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial v}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial a}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \left\langle \left[\frac{\partial f}{\partial y} \diamond u \right]' v, a \right\rangle_{R^M} \right\} dt dx \right\} \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Preuve de 3.b : (u, v) point critique de $\varphi \Rightarrow (u, v)$ solution de (ff) .

Soient $(u, v) \in H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M})$ un point critique de φ , et $\alpha, b \in D_T(\Omega_T; R^M)$. On a alors que $(\alpha, 0), (0, b) \in D_T(\Omega_T; R^{2M}) \subset H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M})$, comme les conditions du théorème 2.1.6 sont satisfaites, on peut appliquer la formule (39) pour calculer la dérivée de φ . On a les calculs ci-après.

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \nabla \varphi(u, v), (0, b) \rangle_{W^1} \\
&= \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial b}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \langle f \diamond u, b \rangle_{R^M} \right\} dt dx \\
0 &= \langle \nabla \varphi(u, v), (\alpha, 0) \rangle_{W^1} \\
&= \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle v, \frac{\partial a}{\partial t} \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial v}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial a}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \left\langle \left[\frac{\partial f}{\partial y} \diamond u \right]' v, a \right\rangle_{R^M} \right\} dt dx
\end{aligned}$$

□

Rappelons que pour résoudre le problème (P1), il suffit de trouver une solution de la forme $(u, 0)$ au problème (P1)+(P2). Par ailleurs, on voit facilement que si la dérivée de φ satisfait la formule (39) alors (u, v) point critique de $\varphi \Rightarrow (u, 0)$ point critique de φ . On

va donc établir une correspondance entre les solutions de (P1) et les points critiques de la forme $(u,0)$ de φ . Voici donc trois versions du problème (P1) que l'on va comparer à la lumière de théorème 2.1.5.

Version classique

$$(VCP1) \quad \begin{aligned} u &\in C(R \times \overline{\Omega}; R^M) \cap C^2(R \times \Omega; R^M) \\ \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta_x u &= f u \text{ sur } R \times \Omega \\ u(t, x) &= 0 \text{ sur } R \times \partial\Omega \\ u(t, x) &= u(t+T, x) \text{ sur } R \times \Omega \end{aligned}$$

Version variationnelle avec paramètres $p, q \in [1, \infty]$.

$$(VARP1[p, q]) \quad \begin{aligned} u &\in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \\ \varphi'(u, 0) &= 0 \end{aligned}$$

où φ est définie sur $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T_0}^{1,q}(\Omega_T; R^M)$ par la formule (29).

Version faible avec paramètre $p \in [1, \infty]$.

$$(ffP1[p]) \quad \begin{aligned} u &\in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \\ \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{1/2} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{1/2} \frac{\partial b}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \langle f u, b \rangle_{R^M} \right\} dt dx &= 0 \quad \forall b \in D_T(\Omega_T; R^M) \end{aligned}$$

□

Établissons des correspondances entre ces trois versions de (P1) pour différentes valeurs de p .

Théorème 2.4.3

Soient $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné et $p \in [1, N+1[$.

Supposons que f satisfait les conditions ci-après.

$$\bullet \quad f \in C(R \times \overline{\Omega}; R^M) \cap C^1(R \times \Omega; R^M). \quad (256)$$

$$\bullet \quad f(t, x, y) = f(t+T, x, y) \quad \forall (t, x, y) \in R \times \Omega \times R^M. \quad (257)$$

$$\bullet \quad f(t, x, 0) = 0 \quad \forall (t, x) \in R \times \partial\Omega. \quad (258)$$

- $\exists a_1 \in]0, \infty[$, $\exists a_2 \in L^1(\Omega_T)$ tels que

$$\|f(t, x, y)\|^p \leq a_1 \|y\|^{\frac{(N-1)p}{N-1-p}} + a_2(t, x) \quad (259)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

- $\exists a_3 \in]0, \infty[$, $\exists a_4 \in L^1(\Omega_T)$ tels que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, y) \right\|^{\frac{(N-1)p}{(N-2)p-(N-1)}} \leq a_3 \|y\|^{\frac{(N-1)p}{N-1-p}} + a_4(t, x) \quad (260)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

Alors

1. Si u est une solution de (VCP1) et $u|_{\Omega_T} \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ alors $u|_{\Omega_T}$ est solution de (ffP1[p]).
2. Si on suppose que Ω est L-régulier alors si u est solution de (ffP1) et que son prolongement périodique \tilde{u} appartient à $C(R \times \overline{\Omega}; R^M) \cap C^2(R \times \Omega; R^M)$ alors \tilde{u} est solution de (VCP1).
3. u est solution de (ffP1[p]) $\Leftrightarrow u$ est solution de (VARP1[p, ∞]).

Démonstration :

Preuve de 1.

Soient $u \in C(R \times \overline{\Omega}; R^M) \cap C^2(R \times \Omega; R^M)$ et $b \in D_T(\Omega_T; R^M)$. On a le calcul ci-après.

$$\int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial a}{\partial x} \right\rangle_{R^{MN}} - \langle f \circ u, b \rangle_{R^M} \right\} dt dx = \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta_x u - f \circ u, b \right\rangle dt dx \right. \\ \left. = 0 \right.$$

Preuve de 2.

Soit $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ une solution de (ffP1[p]) dont le prolongement périodique \tilde{u} appartient à $C(R \times \overline{\Omega}; R^M) \cap C^2(R \times \Omega; R^M)$. On a alors que :

$$\int_{\Omega_T} \left\langle \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta_x u - \mathcal{F}u \right\}, b \right\rangle_{R^M} dt dx = 0 \quad \forall b \in D([0, T] \times \Omega; R^M) \subset D_T(\Omega_T; R^M).$$

On en déduit que :

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta_x u - \mathcal{F}u \right\} \Big|_K = 0 \quad \text{presque partout pour tout compact } K \subset]0, T[\times \Omega.$$

Comme $\tilde{u} \in C(R \times \overline{\Omega}; R^M) \cap C^2(R \times \Omega; R^M)$ la deuxième ligne de (VCP1) est satisfaite par \tilde{u} pour tout $(t, x) \in R \times \Omega$. Pour la troisième ligne de (VCP1), la L-régularité de Ω et la continuité de u sur $[0, T] \times \partial\Omega$ nous donne que $u|_{[0, T] \times \partial\Omega} = \text{Trace}[u : [0, T] \times \partial\Omega] = 0$. Il est trivial que \tilde{u} satisfait la quatrième ligne puisque \tilde{u} est le prolongement périodique de u .

Preuve de 3.a : u solution de (ffP1[p]) $\Rightarrow u$ solution de (VARP1[p, ∞]).

Soient $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ une solution de (ffP1[p]) et $(a, b) \in D_T(\Omega_T; R^{2M})$. Comme les conditions du théorème 2.1.5 partie 1 sont satisfaites φ est de classe C^1 sur $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T_0}^{1,\infty}(\Omega_T; R^M)$ et sa dérivée est donnée par (39). Si on calcule la dérivée de φ au point $(u, 0)$ dans la direction (a, b) on obtient les calculs ci-après.

$$\begin{aligned} (\varphi'(u, 0), (a, b)) &= \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} b_i + d_i \langle \nabla_x u_i, \nabla_x b_i \rangle - (f_i \diamond u) b_i \right\} dt dx \\ &+ \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_T} \left\{ 0 \frac{\partial a_i}{\partial t} + d_i \langle \nabla_x 0, \nabla_x a_i \rangle - 0 \langle (\nabla_y f_i) \diamond u, a \rangle \right\} dt dx \end{aligned} \right\} \\ &= \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial b}{\partial x} \right\rangle_{R^{M^2}} - \langle \mathcal{F}u, b \rangle_{R^M} \right\} dt dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $D_T(\Omega_T; R^{2M})$ est dense dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T_0}^{1,\infty}(\Omega_T; R^M)$ on a montré que $(u, 0)$ est un point critique de φ sur $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T_0}^{1,\infty}(\Omega_T; R^M)$.

Preuve de 3.b : u solution de (VARP1[ρ, ∞]) $\Rightarrow u$ solution de (ffP1[ρ]).

Soit $u \in H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ tel que $(u, 0)$ est point critique de φ sur $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \times H_{T_0}^{1,\infty}(\Omega_T; R^M)$. Soit $b \in D_T(\Omega_T; R^M)$. Comme les conditions du théorème 2.1.5 partie 1 sont respectées, on applique la formule (39) et on obtient les calculs ci-après.

$$0 = (\varphi'(u, 0), (0, b)) = \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial b}{\partial x} \right\rangle_{R^{M^N}} - \langle f \circ u, b \rangle_{R^M} \right\} dt dx. \quad \square$$

Théorème 2.4.4

Soit $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné.

Supposons que f satisfait les conditions ci-après.

- $f \in C(R \times \bar{\Omega}; R^M) \cap C^1(R \times \Omega; R^M)$. (261)

- $f(t, x, y) = f(t + T, x, y) \quad \forall (t, x, y) \in R \times \Omega \times R^M$. (262)

- $f(t, x, 0) = 0 \quad \forall (t, x) \in R \times \partial\Omega$. (263)

- $\exists q \in [1, \infty[$, $\exists \alpha_1 \in]0, \infty[$, $\exists \alpha_2 \in L^1(\Omega_T)$ tels que

$$\|f(t, x, y)\|^{N-1} \leq \alpha_1 \|y\|^q + \alpha_2(t, x) \quad (264)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

- $\exists r, s \in [1, \infty[$, $\exists \alpha_3 \in]0, \infty[$, $\exists \alpha_4 \in L^1(\Omega_T)$ tels que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, y) \right\|^s \leq \alpha_3 \|y\|^r + \alpha_4(t, x) \quad (265)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

Alors

1. Si u est une solution de (VCP1) et $u|_{\Omega_T} \in H_{T_0}^{1,N+1}(\Omega_T; R^M)$ alors $u|_{\Omega_T}$ est solution de (ffP1[$N+1$]).
2. Si on suppose que Ω est L-régulier alors si u est solution de (ffP1[$N+1$]) et que son prolongement périodique \tilde{u} appartient à $C(R \times \bar{\Omega}; R^M) \cap C^2(R \times \Omega; R^M)$ alors \tilde{u} est solution de (VCP1).

3. u est solution de $(\text{ffP1}[N+1]) \Leftrightarrow u$ est solution de $(\text{VARP1}[N+1, \infty])$.

Démonstration :

Preuve de 1.

Le raisonnement est exactement le même qu'au théorème 2.4.3.

Preuve de 2.

Le raisonnement est exactement le même qu'au théorème 2.4.3.

Preuve de 3. : u solution de $(\text{ffP1}[N+1]) \Leftrightarrow u$ solution de $(\text{VARP1}[N+1, \infty])$.

Il suffit de recopier les preuves des points 3.a et 3.b du théorème 2.4.3 en changeant p par $N+1$ et en remplaçant "conditions du théorème 2.1.5 partie 1" par "conditions du théorème 2.1.5 partie 2" . \square

Théorème 2.4.5

Soient $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné et $p \in]N+1, \infty[$.

Supposons que f satisfait les conditions ci-après.

- $f \in C(R \times \bar{\Omega}; R^M) \cap C^1(R \times \Omega; R^M)$. (266)

- $f(t, x, y) = f(t+T, x, y) \quad \forall (t, x, y) \in R \times \Omega \times R^M$. (267)

- $f(t, x, 0) = 0 \quad \forall (t, x) \in R \times \partial\Omega$. (268)

- $\exists q \in [1, \infty[$, $\exists a_1 \in]0, \infty[$, $\exists a_2 \in L^1(\Omega_T)$ tels que

$$\|f(t, x, y)\|^p \leq a_1 \|y\|^q + a_2(t, x) \quad (269)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

- $\exists r, s \in [1, \infty[$, $\exists a_3 \in]0, \infty[$, $\exists a_4 \in L^1(\Omega_T)$ tels que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, y) \right\|^s \leq a_3 \|y\|^r + a_4(t, x) \quad (270)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

Alors

1. Si u est une solution de (VCP1) et $u|_{\Omega_T} \in W^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ alors $u|_{\Omega_T}$ est solution de (ffP1[p]).
2. Si u est solution de (ffP1[p]) et que son prolongement périodique \tilde{u} appartient à $C(R \times \overline{\Omega}; R^M) \cap C^2(R \times \Omega; R^M)$ alors \tilde{u} est solution de (VCP1).
3. u est solution de (ffP1[p]) $\Leftrightarrow u$ est solution de (VARP1[p, ∞]).

Démonstration :

Preuve de 1 : Exactement la même chose qu'au théorème 2.4.3.

Preuve de 2.

On a l'immersion $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow C([0, T] \times \overline{\Omega}; R^M)$ par le lemme 2.1.3. Le prolongement périodique \tilde{u} satisfait donc les lignes 3 et 4 de (VCP1) par la densité de $D_T(\Omega_T; R^M)$ dans $H_{T_0}^{1,p}(\Omega_T; R^M)$. La ligne 1 est satisfaite par hypothèse. Vérifions la ligne 2. On a que :

$$\int_{\Omega_T} \left\langle \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial b}{\partial x} \right\rangle_{R^{M^2}} - \langle f \circ u, b \rangle \right\rangle dt dx = \int_{\Omega_T} \left\langle \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta_x u - f \circ u \right\rangle, b \right\rangle_{R^M} dt dx = 0$$

pour tout $b \in D(\mathfrak{D}, T[\times \Omega; R^M])$. Donc $\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - D \Delta_x u - f \circ u \right\rangle \Big|_K = 0$ pour tout compact

$K \subset \mathfrak{D}, T[\times \Omega$ ce qui entraîne que \tilde{u} satisfait la ligne 2 de (VCP1).

Preuve de 3. : u solution de (ffP1[p]) $\Leftrightarrow u$ solution de (VARP1[p, ∞]).

Il suffit de recopier les preuves des points 3.a et 3.b du théorème 2.4.3 en remplaçant "conditions du théorème 2.1.5 partie 1" par "conditions du théorème 2.1.5 partie 3". \square

Théorème 2.4.6

Soient $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné et $p \in]N + 1, \infty[$.

Supposons que f satisfait les conditions ci-après.

- $f \in C(R \times \overline{\Omega}; R^M) \cap C^1(R \times \Omega; R^M)$. (271)

- $f(t, x, y) = f(t + T, x, y) \quad \forall (t, x, y) \in R \times \Omega \times R^M. \quad (272)$

- $f(t, x, 0) = 0 \quad \forall (t, x) \in R \times \partial\Omega. \quad (273)$

- Pour tout borné $B \subset R^M$, $f(\Omega_T \times M)$ est borné dans R^M . (274)

- Pour tout borné $B \subset R^M$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\Omega_T \times M)$ est borné dans R^{M^2} . (275)

Alors

1. Si u est une solution de (VCP1) et $u|_{\Omega_T} \in W^{1,p}(\Omega_T; R^M)$ alors $u|_{\Omega_T}$ est solution de (ffP1[p]).
2. Si u est solution de (ffP1[p]) et que son prolongement périodique \tilde{u} appartient à $C(R \times \bar{\Omega}; R^M) \cap C^2(R \times \Omega; R^M)$ alors \tilde{u} est solution de (VCP1).
3. u est solution de (ffP1[p]) $\Leftrightarrow u$ est solution de (VARP1[p, ∞]).

Démonstration :

Preuve de 1 : Exactement la même chose qu'au théorème 2.4.3.

Preuve de 2 : Exactement la même chose qu'au théorème 2.4.5.

Preuve de 3. : u solution de (ffP1[p]) $\Leftrightarrow u$ solution de (VARP1[p, ∞]).

Il suffit de recopier les preuves des points 3.a et 3.b du théorème 2.4.3 en remplaçant "conditions du théorème 2.1.5 partie 1" par "conditions du théorème 2.1.5 partie 4". \square

CHAPITRE 3

UN RÉSULTAT D'EXISTENCE

La stratégie que nous utiliserons pour montrer l'existence de solutions sera la suivante :

1. Définir une suite $X_{1,k} \subset X_{2,k} \subset X_{3,k} \subset \dots$ de sous-espaces de dimensions finies telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_{n,k}$ est dense dans $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^k)$.
2. Montrer pour chaque $X_{n,2M}$ l'existence d'un point critique pour $\varphi|_{X_{n,2M}}$ de la forme $(u^n, 0)$.
3. Montrer que toute suite $\{(u^n, 0) \text{ point critique de } \varphi|_{X_{n,2M}} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ possède un point d'accumulation $(u, 0)$ et que $(u, 0)$ est un point critique de φ .
4. Montrer que le u ainsi obtenu est deux fois différentiable dans L^2 et que u et sa trace sur $\partial(\Omega_T)$ satisfont les équations de (P1) au sens L^2 .

3.1 Existence d'une solution L^2 pour (P1) si f a un taux de croissance linéaire.

On donne immédiatement l'énoncé du théorème important de cette section.

Théorème 3.1.1

Supposons que le domaine Ω et la fonction d'interaction f satisfont les conditions ci-après.

(H0) $\Omega \subset R^N$ est un ouvert borné et L-régulier.

(H1) $f \in C^1([0, T] \times \bar{\Omega} \times R^M; R^M)$.

(H2) $f(0, x, y) = f(T, x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial(t, x, y)}(0, x, y) = \frac{\partial f}{\partial(t, x, y)}(T, x, y)$
 $\forall (x, y) \in \bar{\Omega} \times R^M$.

(H3) $f(t, x, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial(t, x, y)}(t, x, 0) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega$.

(H4) $\exists a_1 \in [0, \lambda(1)[$, $\exists a_2 \in L^1(\Omega_T; R)$ tels que

$$|\langle f(t, x, y), z \rangle_{R^M}| \leq a_1 \|D^{1/2} y\| \|D^{1/2} z\| + a_2(t, x)$$

pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y, z \in R^M$;

où $\lambda(1)$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur :

$$-\Delta : H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) : w \mapsto \sum_{i=1}^N \partial_i^2 w.$$

(H5) $\exists a_3 \in]0, \infty[$, $\exists a_4 \in L^1(\Omega_T; R)$ tels que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial(t, x)}(t, x, y) \right\|^2 \leq a_3 \|y\|^{\frac{2N+2}{N-1}} + a_4(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \text{ p.p. dans } \Omega_T, \forall y \in R^M.$$

(H6) $\exists a_5 \in]0, \infty[$ tel que $\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, y) \right\| \leq a_5$, pour (t, x) p.p. dans Ω_T , $\forall y \in R^M$.

Alors ϕ possède un point critique de la forme $(\hat{u}, 0)$ et \hat{u} satisfait les équations du problème (P1) au sens L^2 . \square

Nous allons maintenant définir les sous-espaces de dimensions finies dont on a parlé dans l'entrée en matière de ce chapitre.

Définition 3.1.2

1. Des bases de Hilbert.

- On considère premièrement la base trigonométrique usuelle pour $L^2([0, T[; R)$.

$$B_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{c_0; c_r, s_r : r = 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{où } c_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, c_r(t) = \frac{\cos(2\pi r t/T)}{\sqrt{T/2}}, s_r(t) = \frac{\sin(2\pi r t/T)}{\sqrt{T/2}} \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

- On considère deuxièmement le négatif de l'opérateur de Laplace.

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega) : w \mapsto -\sum_{i=1}^N \partial_i^2 w.$$

Soient $0 < \lambda(1) < \lambda(2) < \dots < \lambda(k) < \dots$ les valeurs propres de $-\Delta$. Prenons également :

$$\begin{array}{lll}
f_1, \dots, f_{n(1)} & \leftrightarrow & \lambda(1) \\
f_{n(1)+1}, \dots, f_{n(2)} & \leftrightarrow & \lambda(2) \\
\dots & \dots & \dots \\
f_{n(k-1)+1}, \dots, f_{n(k)} & \leftrightarrow & \lambda(k) \\
\dots & \dots & \dots
\end{array}$$

des bases pour les espaces propres associés aux différentes valeurs propres. On normalise nos fonctions propres pour que :

$$\|f_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

On a alors que l'ensemble

$$B_2 = \{f_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$$

est une base de Hilbert pour $L^2(\Omega)$ et est presque une base de Hilbert pour

$H_0^1(\Omega)$ (la seule chose qui manque c'est que $\|f_n\|_{H^1} \neq 1$).

- On considère troisièmement la base canonique dans R^M :

$$B_3 = B_3^M = \{e_1^M, \dots, e_M^M\} \text{ où } e_i^M = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ fois}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{M-i \text{ fois}} \right).$$

- Considérons finalement la famille de fonctions

$$B = B^M = \{b_1 b_2 b_3 : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2, b_3 \in B_3^M\}.$$

La famille B génère les espaces de Hilbert $L^2(\Omega_T; R^M)$ et $(H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M), \|\cdot\|_{H^1})$.

Cette famille est une base de Hilbert pour $L^2(\Omega_T; R^M)$ puisqu'elle satisfait les trois axiomes de la définition : orthogonalité des éléments, les combinaisons linéaires finis génèrent l'espace, les éléments sont de norme 1. La famille B ne satisfait que les deux premières axiomes (de la définition d'une base de Hilbert) relativement à l'espace $(H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M), \|\cdot\|_{H^1})$.

2. Pour $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ le sous-espace $X_{k,M} \subset H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$ est formé des fonctions u de la forme :

$$u(t, x) = \sum_{\substack{0 \leq m \leq k \\ 1 \leq n \leq n(k) \\ 1 \leq r \leq M}} a(m, n, r) c_m(t) f_n(x) e_r^M + \sum_{\substack{1 \leq m \leq k \\ 1 \leq n \leq n(k) \\ 1 \leq r \leq M}} b(m, n, r) s_m(t) f_n(x) e_r^M.$$

3. On dénotera par $p_{k,M}$ les deux opérateurs de projection orthogonale

$$p_{k,M} : L^2(\Omega_T; R^M) \rightarrow X_{k,M} \text{ et } p_{k,M} : H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M) \rightarrow X_{k,M}.$$

La raison de cet abus de langage, c'est que, malgré le fait que les deux opérateurs sont définis à partir de produit scalaires différents, le deuxième opérateur est en fait la restriction du premier à $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$. Ce fait est expliqué plus en détails dans les remarques qui suivront cette définition.

Remarques 3.1.3

1. Le sous-espace $X_{k,M}$ est stable sous les opérateurs de dérivée partielle. Toute fonction u appartenant à $X_{k,M}$ possède un développement dans la base B de la forme suivante :

$$u(t, x) = \sum_{\substack{0 \leq m \leq k \\ 1 \leq n \leq n(k) \\ 1 \leq r \leq M}} a(m, n, r) c_m(t) f_n(x) e_r^M + \sum_{\substack{1 \leq m \leq k \\ 1 \leq n \leq n(k) \\ 1 \leq r \leq M}} b(m, n, r) s_m(t) f_n(x) e_r^M.$$

Il suffit donc de vérifier qu'en dérivant les termes de base $c_0 f_n e_r^M; c_m f_n e_r^M, s_m f_n e_r^M$ ($m = 1, \dots, k; n = 1, \dots, n(k); r = 1, \dots, M$) on reste dans $X_{k,M}$.

Pour les fonctions de base du domaine temporel on trouve facilement les formules ci-après.

$$c'_0(t) = 0; c'_m(t) = -\frac{2\pi m}{T} s_m(t), s'_m(t) = \frac{2\pi m}{T} c_m(t) \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (276)$$

Considérons maintenant une fonction de base pour le domaine spatial f_n . Si $\lambda(j)$ est la valeur propre associée à f_n alors on a la relation suivante

$$-\Delta \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (-\Delta f_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda(j) f_n) = \lambda(j) \frac{\partial f_n}{\partial x_i}.$$

Cette dernière relation montre que $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ est une fonction propre appartenant au même

espace propre que f_n et donc que $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ est une combinaison linéaire dans la base

$\{f_{n(j-1)+1}, \dots, f_{n(j)}\}$ de l'espace propre.

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_i} = \sum_{r=n(j-1)+1}^{n(j)} A(r, n, i) f_r \quad (277)$$

En dérivant $c_0 f_n e_r^M$; $c_m f_n e_r^M$, $s_m f_n e_r^M$ ($1 \leq m \leq k, 1 \leq n \leq n(k), 1 \leq r \leq M$) on trouve alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial [c_0 f_n e_r^M]}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial [c_m f_n e_r^M]}{\partial t} = -\frac{2\pi m}{T} s_m f_n e_r^M, \quad \frac{\partial [s_m f_n e_r^M]}{\partial t} = \frac{2\pi m}{T} c_m f_n e_r^M, \\ \frac{\partial [c_0 f_n e_r^M]}{\partial x_i} &= \sum_{s=n(j_n-1)}^{n(j_n)} A(s, n, i) c_0 f_s e_r^M, \quad \frac{\partial [c_m f_n e_r^M]}{\partial x_i} = \sum_{s=n(j_n-1)}^{n(j_n)} A(s, n, i) c_m f_s e_r^M, \\ \frac{\partial [s_m f_n e_r^M]}{\partial x_i} &= \sum_{s=n(j_n-1)}^{n(j_n)} A(s, n, i) s_m f_s e_r^M. \end{aligned}$$

Ces fonctions appartiennent toutes à $X_{k,M}$.

2. Montrons que la $H_{T_0}^1$ -projection orthogonale sur $X_{k,M}$ est en fait la restriction à $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$ de la L^2 -projection orthogonale sur $X_{k,M}$. Pour le temps de cette remarque on va dénoter par $p_{k,M}: L^2(\Omega_T; R^M) \rightarrow X_{k,M}$ et $q_{k,M}: H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M) \rightarrow X_{k,M}$ les deux opérateurs de projection. Soit $u \in H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$ et \tilde{u} un polynôme dans la base B qui approxime u avec une précision ε selon la norme H^1 . Par la définition de la norme H^1 ce polynôme approxime également u avec une précision ε dans L^2 . Explicitons l'expression du polynôme \tilde{u} .

$$\tilde{u} = \sum_{\substack{(m,n) \in A(S) \\ 1 \leq r \leq M}} a(m, n, r) c_m f_n e_r^M + \sum_{\substack{(m,n) \in B(S) \\ 1 \leq r \leq M}} b(m, n, r) c_m f_n e_r^M$$

où $A(S) = \{0, \dots, S\} \times \{1, \dots, n(S)\}$ et $B(S) = \{1, \dots, S\} \times \{1, \dots, n(S)\}$. On suppose sans perte de généralité que $S > k$.

On peut séparer ce polynôme en deux morceaux :

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \left[\sum_{\substack{(m,n) \in A(k) \\ 1 \leq r \leq M}} a(m, n, r) c_m f_n e_r^M + \sum_{\substack{(m,n) \in B(k) \\ 1 \leq r \leq M}} b(m, n, r) s_m f_n e_r^M \right] \\ &+ \left[\sum_{\substack{(m,n) \in A(S)-A(k) \\ 1 \leq r \leq M}} a(m, n, r) c_m f_n e_r^M + \sum_{\substack{(m,n) \in B(S)-B(k) \\ 1 \leq r \leq M}} b(m, n, r) s_m f_n e_r^M \right] \\ &= \tilde{u}^1 + \tilde{u}^2 \end{aligned}$$

On voit facilement que $\tilde{u}^1 \in X_{k,M}$ et que \tilde{u}^2 est à la fois L^2 -orthogonal et H^1 -orthogonal à \tilde{u}^1 . On a alors le calcul ci-après.

$$\begin{aligned} \|p_{k,M}(u) - q_{k,M}(u)\|_{L^2} &\leq \|p_{k,M}(u) - \tilde{u}^1\|_{L^2} + \|\tilde{u}^1 - q_{k,M}(u)\|_{L^2} \\ &= \|p_{k,M}(u - \tilde{u})\|_{L^2} + \|q_{k,M}(\tilde{u} - u)\|_{L^2} \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire les deux projections sont égales.

3. En fait, un énoncé plus général est vrai. La restriction de $p_{k,M}$ à $H_{T_0}^m(\Omega_T; R^M)$ ($m = 1, 2, \dots$) est une projection orthogonale pour le produit scalaire dans H^m . La preuve est une simple adaptation de la remarque précédente. \square

On va maintenant prouver l'existence de points critiques en dimension finie pour la fonctionnelle φ . On a besoin d'un petit lemme.

Lemme 3.1.4

Soit X un espace de Hilbert et soient $u, v \in X - \{0\}$ tels que $\langle u, v \rangle > 0$.

Alors $0 < \|u - rv\| < \|u\|$ pour $0 < r < 2\langle u, v \rangle / \|v\|^2$.

Démonstration :

Considérons le polynôme quadratique :

$$\begin{aligned} P(r) &= \|u - rv\|^2 - \|u\|^2 \\ &= -2r\langle u, v \rangle + r^2\|v\|^2 \\ &= r(r\|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle). \end{aligned}$$

La valeur de $P(r)$ sera strictement négative quand r est compris entre les deux racines $r_1 = 0$ et $r_2 = 2\langle u, v \rangle / \|v\|^2$. \square

Théorème 3.1.5

Supposons que f et Ω satisfont les hypothèses (H0) à (H6) du théorème 3.1.1.

Alors $\varphi|_{X_{n,2M}}$ possède un point critique de la forme $(u,0)$ pour $n = 1,2,3,\dots$

Démonstration :

Étape 1 :

Définir une fonction $\psi_{k,M} : X_{k,M} \rightarrow X_{k,M}$ dont les racines donnent les points critiques de la forme $(u,0)$ de $\varphi|_{X_{k,2M}}$.

Par la définition de φ , $\varphi(\cdot,0)$ est la fonction constante à zéro. Alors

$$\langle \nabla \varphi(u,0), (a,0) \rangle_{H^1} = 0 \quad \forall u, a \in X_{k,M}. \quad (278)$$

Donc pour vérifier qu'un point $(\hat{u},0) \in X_{k,M} \times \{0\}$ est point critique de $\varphi|_{X_{k,2M}}$, il suffit et

il faut que \hat{u} satisfasse l'équation suivante :

$$\langle \nabla \varphi(\hat{u},0), (0,b) \rangle_{H^1} = 0 \quad \forall b \in X_{k,M}. \quad (279)$$

Par (39) et la stabilité de $X_{k,M}$ sous la dérivation (279) peut s'écrire :

$$\left\langle \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - D\Delta_x \hat{u} - \mathcal{F}\hat{u}, b \right\rangle_{L^2} = 0 \quad \forall b \in X_{k,M},$$

ou de façon équivalente

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - D\Delta_x \hat{u} - p_{k,M}(\mathcal{F}\hat{u}) = 0. \quad (280)$$

En posant :

$$\psi_{k,M}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta_x u - p_{k,M}(\mathcal{F}u) \quad (u \in X_{k,M}), \quad (281)$$

on conclut cette étape avec l'équivalence logique suivante :

$$(u,0) \in X_{k,M} \times 0 \text{ est point critique de } \varphi|_{X_{k,2M}} \Leftrightarrow \psi_{k,M}(u) = 0. \quad (282)$$

Étape 2 :

Définir une fonction $V_{k,M} : X_{k,M} \rightarrow X_{k,M}$ dont les points fixes sont les racines de $\psi|_{X_{k,2M}}$.

On définit tout d'abord la fonction suivante :

$$G_{k,M}(u) = \langle \psi_{k,M}(u), u \rangle_{L^2} \quad (u \in X_{k,M}). \quad (283)$$

Les calculs qui suivront démontrent que $G_{k,M}$ est coercitive. Comme $X_{k,M}$ est un espace de dimension finie, toutes les normes s'équivalent sur cet espace. Nos calculs utilisent la norme L^2 .

$$\begin{aligned}
G_{k,M}(u) &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u \right\rangle_{L^2} + \langle -D\Delta_x u, u \rangle_{L^2} - \langle p_{k,M}(f(u)), u \rangle_{L^2} \\
&\geq 0 + \lambda(1) \|D^{1/2}u\|_{L^2}^2 - \alpha_1 \|D^{1/2}u\|_{L^2}^2 - \|a_2\|_{L^1} \\
&= [\lambda(1) - \alpha_1] \|D^{1/2}u\|_{L^2}^2 - \|a_2\|_{L^1} \\
&\rightarrow \infty \text{ si } \|u\|_{L^2} \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Il existe donc une constante $S_1 > 0$ telle que :

$$\langle \psi_{k,M}(u), u \rangle_{L^2} > 0 \quad (\forall u \in X_{k,M} \text{ tel que } \|u\|_{L^2} \geq S_1). \quad (284)$$

On peut maintenant définir notre problème de points fixes. On pose les définitions suivantes :

$$S_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \min \left\{ \frac{\langle \psi_{k,M}(u), u \rangle_{L^2}}{\|\psi_{k,M}(u)\|_{L^2}^2 + 1} : u \in X_{k,M}, \|u\|_{L^2} = S_1 \right\}, \quad (285)$$

$$r_{k,M}(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \frac{\langle \psi_{k,M}(u), u \rangle_{L^2}}{\|\psi_{k,M}(u)\|_{L^2}^2 + 1} & \text{si } \|u\|_{L^2} \geq S_1, \\ \max \left(S_2, \frac{\langle \psi_{k,M}(u), u \rangle_{L^2}}{\|\psi_{k,M}(u)\|_{L^2}^2 + 1} \right) & \text{si } \|u\|_{L^2} \leq S_1, \end{cases} \quad (286)$$

$$V_{k,M}(u) \stackrel{\text{déf}}{=} u - r_{k,M}(u) \psi_{k,M}(u), \quad (287)$$

$$S_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \max \left\{ \|V_{k,M}(u)\|_{L^2} : u \in X_{k,M}, \|u\|_{L^2} \leq S_1 \right\}. \quad (288)$$

On observe tout d'abord que les définitions (286), (288) sont valides en raison de la dimension finie de $X_{k,M}$. Nous allons maintenant montrer que les points fixes de $V_{k,M}$ sont les racines de $\psi_{k,M}$. Un examen superficiel de (287) nous donne l'équivalence

logique :

$$V_{k,M}(u) = u \Leftrightarrow (r_{k,M}(u) = 0) \text{ ou } (\psi_{k,M}(u) = 0).$$

Toutefois, la première alternative est interdite par la définition de la fonction $r_{k,\mathcal{M}}$. En effet, si $\|u\|_{L^2} \geq S_1$ alors $r_{k,\mathcal{M}}(u) > 0$ par (284) et (286). Si $\|u\|_{L^2} \leq S_1$ alors $r_{k,\mathcal{M}}(u) \geq S_2 > 0$ par (285) et (286). Il est donc démontré que :

$$\hat{u} \in X_{k,\mathcal{M}} \text{ est point critique de } V_{k,\mathcal{M}} \Leftrightarrow \hat{u} \text{ est racine de } \psi_{k,\mathcal{M}}. \quad (289)$$

Étape 3 : *Montrer que $V_{k,\mathcal{M}}$ possède un point fixe.*

Soit

$$B = \{u \in X_{k,\mathcal{M}} : \|u\|_{L^2} \leq \max(S_1, S_3)\}. \quad (290)$$

On voit facilement que $V_{k,\mathcal{M}}(B) \subset B$. Prenons $\ddot{u} \in B$. Si $\|\ddot{u}\|_{L^2} \leq S_1$ alors $\|V_{k,\mathcal{M}}(\ddot{u})\|_{L^2} \leq S_3 \leq \text{rayon}(B)$. Dans l'autre cas, si $S_1 \leq \|\ddot{u}\|_{L^2} \leq \text{rayon}(B)$ on a par (286),(287) que :

$$r_{k,\mathcal{M}}(\ddot{u}) \in \left[0, \frac{2\langle \ddot{u}, \psi_{k,\mathcal{M}}(\ddot{u}) \rangle_{L^2}}{\|\psi_{k,\mathcal{M}}(\ddot{u})\|_{L^2}^2} \right]. \quad (291)$$

D'autre part, par (284), on a aussi:

$$\langle \ddot{u}, \psi_{k,\mathcal{M}}(\ddot{u}) \rangle_{L^2} > 0. \quad (292)$$

Appliquons le lemme 3.1.4 avec $X = X_{k,\mathcal{M}}$, $u = \ddot{u}$, $r = r_{k,\mathcal{M}}(\ddot{u})$ et $v = \psi_{k,\mathcal{M}}(\ddot{u})$. On trouve alors :

$$\|V_{k,\mathcal{M}}(\ddot{u})\|_{L^2} \langle \|\ddot{u}\| \leq S_1 \leq \text{rayon}(B). \quad (293)$$

Donc $V_{k,\mathcal{M}}(B) \subset B$ et par le théorème de Brouwer, $V_{k,\mathcal{M}}$ possède un point fixe dans B .

Étape 4 : *Conclusion.*

Par l'étape 3 et les équivalences logiques (282), (289) $\varphi|_{X_{k,\mathcal{M}}}$ possède un point critique de la forme $(\hat{u}, 0)$. \square

Théorème 3.1.6

Supposons que f et Ω satisfont les conditions (H0) à (H6). Alors l'ensemble

$$PCDF \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ u \in X_{k,2M} : \nabla \varphi|_{X_{k,2M}}(u,0) = 0 \right\} \quad (294)$$

est borné dans $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$.

Démonstration :

Soit $(\hat{u}, 0)$ un point critique de $\varphi|_{X_{k,2M}}$. Alors on a :

$$\langle \nabla \varphi(\hat{u}, 0), (0, b) \rangle_{H^1} = 0 \quad \forall b \in X_{k,M}. \quad (295)$$

D'autre part, par (39) et la stabilité de $X_{k,M}$ sous la dérivation on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \nabla \varphi(\hat{u}, 0), (0, b) \rangle_{H^1} &= \left\langle \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}, b \right\rangle_{L^2} + \left\langle D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}, D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial b}{\partial b} \right\rangle_{L^2} - \langle \mathcal{F}u, b \rangle_{L^2} \\ &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta_x u - \mathcal{F}u, b \right\rangle_{L^2} \end{aligned} \quad (296)$$

$$\forall b \in X_{k,M}.$$

Autrement dit :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - D\Delta_x \hat{u} = \mathcal{F}\hat{u}. \quad (297)$$

On va maintenant prouver que \hat{u} est borné dans $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$. La preuve passe par une série d'étapes; à chaque étape nous majorons la norme de \hat{u} , de $\mathcal{F}\hat{u}$ ou de l'une ou l'autre de leurs dérivées partielles. À l'étape finale nous majorerons la norme H^2 de \hat{u} .

Étape 1 : Une borne pour \hat{u} dans $L^2(\Omega_T; R^M)$.

En prenant $b = \hat{u}$ dans (295),(296) et en utilisant la L^2 -orthogonalité existant entre u et

$\frac{\partial u}{\partial t}$ on trouve :

$$\langle \mathcal{F}\hat{u}, \hat{u} \rangle_{L^2} = \langle -D\Delta_x \hat{u}, \hat{u} \rangle_{L^2} = \left\| D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega_T; R^{M^2})}^2.$$

On obtient alors les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\lambda(1) \left\| D^{\frac{1}{2}} \hat{u} \right\|_{L^2}^2 &\leq \langle -D\Delta_x \hat{u}, \hat{u} \rangle_{L^2} \\
&= \langle \mathcal{F}\hat{u}, \hat{u} \rangle_{L^2} \\
&\leq \alpha_1 \left\| D^{\frac{1}{2}} \hat{u} \right\|_{L^2}^2 + \|a_2\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $[\lambda(1) - \alpha_1] \left\| D^{\frac{1}{2}} \hat{u} \right\|_{L^2}^2 - \|a_2\|_{L^1} \leq 0$. Par hypothèse $\lambda(1) - \alpha_1 > 0$ et $\left\| D^{\frac{1}{2}} \hat{u} \right\|_{L^2}$ est borné par

la racine positive de la parabole $p(x) = [\lambda(1) - \alpha_1]x^2 - \|a_2\|_{L^1}$.

$$\left\| D^{\frac{1}{2}} \hat{u} \right\|_{L^2} \leq \frac{\|a_2\|_{L^1}^{1/2}}{\lambda(1) - \alpha_1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_0.$$

Ce qui entraine la majoration ci-apr\u00e8s pour $\|u\|_{L^2}$.

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{\|a_2\|_{L^1}^{1/2}}{\lambda(1) - \alpha_1} \max\{d_1^{-1/2}, \dots, d_M^{-1/2}\} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_1. \quad (298)$$

\u00c9tape 2 : Une borne pour $\mathcal{F}\hat{u}$ dans $L^2(\Omega_T; R^M)$.

Par l'hypoth\u00e8se (H4), on obtient le calcul ci-apr\u00e8s.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}\hat{u}\|_{L^2} &= \sup_{\substack{b \in D_T(\Omega_T, R^M) \\ \|b\|_{L^2} = 1}} |\langle \mathcal{F}\hat{u}, b \rangle_{L^2}| \\
&\leq \alpha_1 \left\| D^{\frac{1}{2}} \hat{u} \right\|_{L^2} \max\left\{d_1^{\frac{1}{2}}, \dots, d_M^{\frac{1}{2}}\right\} + \|a_2\|_{L^1} \quad (299) \\
&\leq \alpha_1 K_0 \max\left\{d_1^{\frac{1}{2}}, \dots, d_M^{\frac{1}{2}}\right\} + \|a_2\|_{L^1} \\
&\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_2
\end{aligned}$$

\u00c9tape 3 : Des bornes pour $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ dans $L^2(\Omega_T; R^M)$ et pour $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$ dans $L^2(\Omega_T; R^{MN})$.

La L^2 -orthogonalit\u00e9 entre $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ et $D\Delta_x \hat{u}$ entraine les in\u00e9galit\u00e9s ci-apr\u00e8s.

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_{L^2} \leq \|p_{k,M}(\mathcal{F}\hat{u})\|_{L^2} \leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{L^2} \leq K_2 \quad (300)$$

$$\|D\Delta_x \hat{u}\|_{L^2} \leq \|p_{k,M}(\mathcal{F}\hat{u})\|_{L^2} \leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{L^2} \leq K_2 \quad (301)$$

$$\|\Delta_x \hat{u}\|_{L^2} \leq \max\{d_1^{-1}, \dots, d_M^{-1}\} \|D\Delta_x \hat{u}\|_{L^2} \leq \max\{d_1^{-1}, \dots, d_M^{-1}\} K_2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_3 \quad (302)$$

En utilisant la stabilit\u00e9 sous la d\u00e9rivation de $X_{k,M}$ et l'in\u00e9galit\u00e9 de Cauchy-Schwarz on obtient alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 &= \sum_{i=1}^M \langle \nabla_x u_i, \nabla_x u_i \rangle_{L^2(\Omega_T; \mathbb{R}^M)} = \sum_{i=1}^M \langle -\Delta_x u_i, u_i \rangle_{L^2(\Omega_T; \mathbb{R})} \\ &\leq \|\Delta_x u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq K_3 K_1 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_4^2. \end{aligned} \quad (303)$$

\u00c9tape 4 : Une borne pour \hat{u} dans $H_{T_0}^1(\Omega_T; \mathbb{R}^M)$.

On a premi\u00e8rement l'in\u00e9galit\u00e9 suivante :

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{H^1}^2 &= \|\hat{u}\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq K_1^2 + K_2^2 + K_4^2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_5^2. \end{aligned} \quad (304)$$

On donc born\u00e9 \hat{u} dans $H^1(\Omega_T; \mathbb{R}^M)$. Comme d'autre part $\hat{u} \in X_{k,M}$, les hypoth\u00e8ses de la proposition 2.3.1 sont toutes satisfaites avec $p=2$ et $v=\hat{u}$ et donc $v \in H_{T_0}^1(\Omega_T; \mathbb{R}^M)$.

\u00c9tape 5 : Une borne pour \hat{u} dans $L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; \mathbb{R}^M)$.

Par l'immersion $H_{T_0}^1(\Omega_T; \mathbb{R}^M) \hookrightarrow L^{\frac{2N+2}{N-1}}(\Omega_T; \mathbb{R}^M)$ il existe une constante $c>0$ telle que :

$$\|u\|_{L^{(2N+2)/(N-1)}} \leq c \|u\|_{H^1} \quad \forall u \in H_{T_0}^1(\Omega_T; \mathbb{R}^M).$$

Ainsi :

$$\|\hat{u}\|_{L^{(2N+2)/(N-1)}} \leq c K_5 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_6. \quad (305)$$

Étape 6 : Une borne L^2 pour $\frac{\partial}{\partial(t, x)}(\mathcal{F}\hat{u})$.

Par le théorème 2.3.3, on a que $\mathcal{F}\hat{u} \in H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$ et que la règle de chaîne ci-après est valide.

$$\frac{\partial(\mathcal{F}\hat{u})}{\partial(t, x)} = \frac{\partial f}{\partial(t, x)} \diamond \hat{u} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \diamond \hat{u} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial(t, x)} \quad (306)$$

On va trouver des bornes pour les différentes fonctions apparaissant dans le membre de droite de (306).

- L'hypothèse (H5) nous permet de borner $\frac{\partial f}{\partial(t, x)} \diamond \hat{u}$.

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial(t, x)} \diamond \hat{u} \right\|_{L^2}^2 \leq a_3 \|\hat{u}\|_{L^{\frac{2N-2}{N-1}}}^{\frac{2N-2}{N-1}} + \|a_4\|_{L^1} \leq a_3 K_6^{\frac{2N-2}{N-1}} + \|a_4\|_{L^1} \stackrel{\text{déf}}{=} K_7^2 \quad (307)$$

- L'hypothèse (H6) et l'inégalité de Hölder nous permettent de borner

$$\left\| \left(\frac{\partial f}{\partial y} \diamond \hat{u} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial(t, x)} \right\|_{L^2}^2 \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \diamond \hat{u} \right\|_{L^\infty}^2 \left[\left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 \right] \leq c_5^2 [K_2^2 + K_4^2] \stackrel{\text{déf}}{=} K_8^2 \quad (308)$$

- On a donc par l'inégalité du triangle :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial(t, x)}(\mathcal{F}\hat{u}) \right\|_{L^2} \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial(t, x)} \diamond \hat{u} \right\|_{L^2} + \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial y} \diamond \hat{u} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial(t, x)} \right\|_{L^2} \leq K_7 + K_8 \stackrel{\text{déf}}{=} K_9. \quad (309)$$

Étape 7 : Une borne pour $\mathcal{F}\hat{u}$ dans $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$.

De (309), (299) on trouve l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{F}\hat{u}\|_{H^1}^2 \leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial(t, x)}(\mathcal{F}\hat{u}) \right\|_{L^2}^2 \leq K_2^2 + K_9^2 \stackrel{\text{déf}}{=} K_{10}^2. \quad (310)$$

De (H1),(H2) et de la proposition 2.3.1, on trouve que $\mathcal{F}\hat{u} \in H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$.

Étape 8 : Une borne pour $\frac{\partial \hat{u}}{\partial(t, x)}$ dans $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{[N+1]M})$.

Les fonctions $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ et $D\Delta_x \hat{u}$ sont $H_{T_0}^1$ -orthogonales entre elles. On déduit alors de (297)

les inégalités suivantes :

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_{H^1} \leq \|p_{k,M}(\mathcal{F}\hat{u})\|_{H^1} \leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{H^1} \leq K_{10}, \quad (311)$$

$$\|D\Delta_x \hat{u}\|_{H^1} \leq \|p_{k,M}(\mathcal{F}\hat{u})\|_{H^1} \leq \|\mathcal{F}\hat{u}\|_{H^1} \leq K_{10}, \quad (312)$$

$$\|\Delta_x \hat{u}\|_{H^1} \leq \max\{d_1^{-1}, \dots, d_M^{-1}\} \|D\Delta_x \hat{u}\|_{H^1} \leq \max\{d_1^{-1}, \dots, d_M^{-1}\} K_{10} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_{11}. \quad (313)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne ensuite la borne suivante :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right\|_{H^1(\Omega_T; R^{M^N})}^2 &= \sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq 1 \\ 1 \leq i \leq M}} \langle \nabla_x [\partial^\alpha \hat{u}_i], \nabla_x [\partial^\alpha \hat{u}_i] \rangle_{L^2(\Omega_T; R^N)} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq 1 \\ 1 \leq i \leq M}} \langle -\Delta_x [\partial^\alpha \hat{u}_i], \partial^\alpha \hat{u}_i \rangle_{L^2(\Omega_T; R)} \\ &= \langle -\Delta_x \hat{u}, \hat{u} \rangle_{H^1(\Omega_T; R^M)} \\ &\leq \|\Delta_x \hat{u}\|_{H^1(\Omega_T; R^M)} \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega_T; R^M)} \\ &\leq K_{11} K_5 \\ &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_{12}^2. \end{aligned} \quad (314)$$

On obtient finalement la borne suivante pour la dérivée de u :

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial(t, x)} \right\|_{H^1}^2 = \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_{H^1}^2 + \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right\|_{H^1}^2 \leq K_{10}^2 + K_{12}^2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_{13}^2. \quad (315)$$

Étape 9 : Une borne pour \hat{u} dans $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$.

Les inégalités (298), (315) nous donnent la borne suivante :

$$\|\hat{u}\|_{H^2} = \|\hat{u}\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial(t, x)} \right\|_{H^1} \leq K_1 + K_{13}^2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} K_{14}^2. \quad (316)$$

On vient donc de borner \hat{u} dans $H^2(\Omega_T; R^M)$. On a d'autre part que $\hat{u} \in X_{k,M} \subset H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$ ce qui veut dire qu'on a borné \hat{u} dans $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$.

Conclusion : La constante K_{14} est indépendante du point critique en dimension finie $(\hat{u}, 0)$ et du sous-espace $X_{k,M}$ auquel \hat{u} appartient. Le lecteur peut s'en convaincre en

inspectant les différentes étapes du raisonnement précédent. On a donc borné l'ensemble $PCDF$ dans $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$. \square

Corollaire 3.1.7

Supposons que Ω et f satisfont (H0) à (H6).

Soit une suite $\{\hat{u}^k : k = 1, 2, 3, \dots\} \subset PCDF$ telle que $(\hat{u}^k, 0)$ est point critique de $\varphi|_{X_{k, 2M}}$.

Alors $\{\hat{u}^k\}$ possède un point d'accumulation \hat{u} relativement à la topologie faible sur $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$. De plus, tous les points d'accumulation $H_{T_0}^2$ -faibles de $\{\hat{u}^k\}$ possèdent les propriétés ci-dessous :

- $(\hat{u}, 0)$ est un point critique de la fonctionnelle $\varphi : H_{T_0}^1(\Omega_T; R^{2M}) \rightarrow R$. (317)
- \hat{u} et $Trace[u : \partial(\Omega_T)]$ satisfont les équations du problème (P1) au sens L^2 . (318)

Démonstration :

La suite $\{\hat{u}^k\}$ est borné dans l'espace réflexif $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$ ce qui implique qu'il existe une sous-suite $\{\hat{u}^{k(r)}\}$ qui converge faiblement vers un certain $\hat{u} \in H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$. Par l'immersion compacte $H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M) \hookrightarrow H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$ on a la convergence forte suivante :

$$\hat{u}^{k(r)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \hat{u} \text{ dans } H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M).$$

Par la continuité de $\nabla \varphi$ sur $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$, on trouve la convergence forte :

$$\nabla \varphi(\hat{u}^{k(r)}, 0) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \nabla \varphi(\hat{u}, 0) \text{ dans } H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M). \quad (319)$$

Prenons maintenant \hat{k} un entier positif fixé. On a alors

$$\nabla \varphi(\hat{u}^{k(r)}, 0) \Big|_{X_{k, 2M}} = 0 \text{ quand } k(r) > \hat{k}.$$

Ainsi, on a la convergence faible :

$$\nabla \varphi(\hat{u}^{k(r)}, 0) \xrightarrow[\text{faible}]{r \rightarrow \infty} 0 \text{ dans } H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M). \quad (320)$$

Donc $\nabla \varphi(\hat{u}, 0) = 0$ puisque la limite forte de $\{\nabla \varphi(\hat{u}^{k(r)}, 0)\}$ dans $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$ doit être égale à sa limite faible. (317) est donc démontrée.

Vérifions maintenant que \hat{u} satisfait les équations du problème (P1) au sens L^2 . Plus précisément on va vérifier les équations suivantes :

$$(P1') \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - D\Delta_x \hat{u} &= \mathcal{F}\hat{u} && \text{dans } L^2(\Omega_T; R^M) \\ \text{Trace}[\hat{u} : \{0\} \times \Omega] &= \text{Trace}[\hat{u} : \{T\} \times \Omega] && \text{dans } L^2(\Omega; R^M) \\ \text{Trace}[\hat{u} : [0, T] \times \partial\Omega] &= 0 && \text{dans } L^2([0, T] \times \partial\Omega; R^M). \end{aligned}$$

Comme Ω est L-régulier les équations 2 et 3 de (P1') sont satisfaites par tous les éléments de $H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M)$ et en particulier par \hat{u} . Vérifions l'équation 1. En utilisant le fait que $\hat{u} \in H_{T_0}^2(\Omega_T; R^M)$, que $(\hat{u}, 0)$ est point critique de $\varphi : H_{T_0}^1(\Omega_T; R^M) \rightarrow R$ et la formule (39) on obtient les calculs ci-après.

Pour tout $b \in D_T(\Omega_T; R^M)$ on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla \varphi(\hat{u}, 0), (0, b) \rangle_{H^1} \\ &= \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} + \left\langle D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}, D^{\frac{1}{2}} \frac{\partial b}{\partial x} \right\rangle_{R^{M^2}} - \langle \mathcal{F}\hat{u}, b \rangle_{R^M} \right\} dt dx \\ &= \int_{\Omega_T} \left\{ \left\langle \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}, b \right\rangle_{R^M} - \langle D\Delta_x \hat{u}, b \rangle_{R^M} - \langle \mathcal{F}\hat{u}, b \rangle_{R^M} \right\} dt dx. \end{aligned}$$

Comme $D_T(\Omega_T; R^M)$ est dense dans $L^2(\Omega_T; R^M)$ l'équation 1 de (P1') est satisfaite. \square

CONCLUSION

Ce travail m'a permis d'explorer plusieurs avenues de recherche intéressantes tant du côté des systèmes de diffusion-réaction que pour des questions plus théoriques. Les questions que nous comptons explorer dans le futur à moyen terme sont les suivantes :

- Il existe des exemples concrets où des substances diffusent d'un milieu vers un autre en traversant une interface qui n'est pas régulière. On peut penser à différents organes du corps humain comme les poumons, les reins, le foie, l'intestin dont l'interface est pleine de replis et de ramifications microscopiques. Si on pouvait affranchir la théorie des traces des contraintes de régularité habituelles, on pourrait sans doute adapter les modèles de diffusion-réaction pour étudier les interactions d'un être vivant avec son milieu extérieur par ses différentes interfaces (système respiratoire, système digestif, systèmes d'élimination des déchets, etc). Une approche possible serait de définir des espaces de Sobolev sur des objets fractales.
- L'approche qu'on a utilisé pour montrer l'existence de solutions est constructive. Il serait bon de développer des algorithmes pour résoudre numériquement les systèmes de diffusion-réaction avec condition Dirichlet-périodique.
- Dans la pratique, les solutions périodiques intéressantes sont celles qui sont stables dans le cadre d'une formulation sous forme d'un problème d'évolution. Pourrait-on ajouter des contraintes supplémentaires au problème dans $H_{T_0}^{1,p} \times H_{T_0}^{1,q}$ pour éliminer les solutions instables sans se référer explicitement au problème d'évolution? Il suffirait peut être d'imposer une contrainte à $Trace[u : \{t = 0\}]$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Adams (R. A.), Sobolev Spaces, (Academic Press, New York, E.U., 1975).
- [2] Brézis (H.), Analyse fonctionnelle, (Masson, Paris, France, 1993).
- [3] Chen (Xu-Yan), Polàcik (P.), Asymptotic periodicity of positive solutions of reaction-diffusion equations on a ball, J. Reine Angew. Math. 472 (1996), pp. 17-51.
- [4] Dikanski (A.), Periodic solutions and Galerkin approximations to the autonomous reaction-diffusion equations, Bull. Australian Math. Soc. , Vol 48 (1993), pp. 127-140.
- [5] Dikanski (A.), Galerkin approximations to the nonautonomous periodic reaction-diffusion equations, Nonlinear Anal. 22 (1994), no. 10, pp. 1201-1208.
- [6] Fan (G.), Leung (A.), Existence and stability of periodic solutions for competing species diffusion systems with Dirichlet boundary conditions, Appl. Anal. 39 (1990), no. 2-3, 119-149.
- [7] Freedman (H. I.), Ruan (S.), On reaction-diffusion systems of zooplankton-phytoplankton-nutrient models, Differential Equations Dynamical Systems 2 (1994), no. 1, pp. 49-64.
- [8] Krasnosel'skii (M.A.), Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations (Macmillan Company, New York, E.U., 1964).
- [9] Kufner (A.), John (O.) et Fucik (S.), Function Spaces, (Noordhoff International Publishing, Leyden, Norvège et Academia : Maison d'édition de l'académie des sciences de Tchécoslovaquie, Prague, Tchécoslovaquie, 1977).

- [10] Halmos (P. R.), *Measure theory*, (Springer-Verlag, New York, E.U., 1974).
- [11] Lions (J.L.) et Magenes (E.), *Problèmes aux limites non homogènes et applications volumes I, II, III*, (Dunod, Paris, France, 1968).
- [12] Liu (B.-P.), Pao (C.V.), Periodic solutions of coupled semilinear parabolic boundary value problems, *Nonlinear Anal.* 6 (1982) , pp. 237-252.
- [13] López-Gómez (J.), Positive periodic solutions of Lotka-Volterra reaction-diffusion systems, *Differential Integral Equations* 5 (1992), no. 1, 55-72.
- [14] Morgan (J. J.), Hollis (S. L.), The existence of periodic solutions to reaction-diffusion systems with periodic data, *SIAM J. Math. Anal.* 26 (1995), no. 5, pp. 1225-1232.
- [15] Nkashama (M. N.), Willem (M.), Periodic solutions of the boundary value problem for the nonlinear heat equation, *Bull. Australian Math. Soc.*, Vol 29 (1984), no. 1, pp. 99-110.
- [16] Polacik (P.), Šošovicka (V.), Stable periodic solutions of a spatially homogenous nonlocal reaction-diffusion equation, *Proc. Roy. Soc. Edimbourg Sect. A* 126 (1996), no. 4, pp. 867-884.
- [17] Smoller (J.), *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, (Springer-Verlag, New York, E.U., 1994).
- [18] Smith (R. A.), Poincaré-Bendixson theory for certain reaction-diffusion boundary value problems, *Proc. Roy. Soc. Edimbourg Sect. A* 124 (1994), no. 1, pp. 33-69.

- [19] Tineo (A.), Asymptotic behavior of solutions of a periodic reaction-diffusion system of a competitor-competitor-mutualist model, J. Differential Equations 108 (1994), no. 2, pp. 326-341.